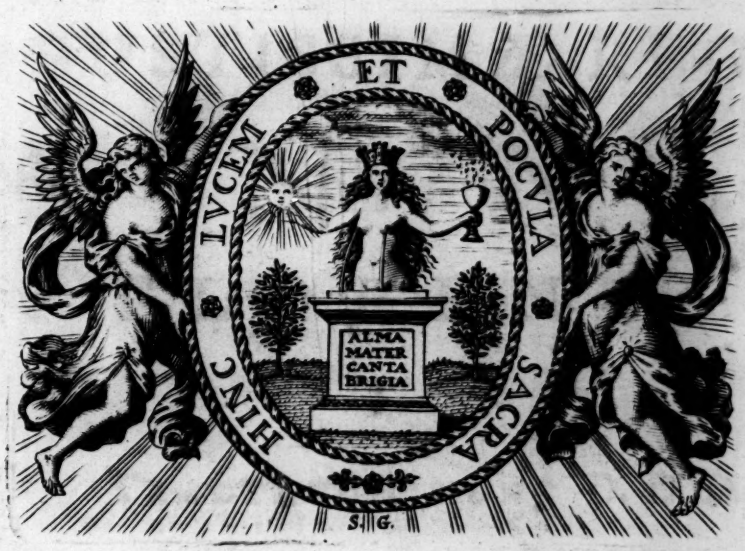
PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.



CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.

BRITISH MUSEUM

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.

CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D. D. D.

Js. NEWTONUS.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

BRITISH MUSEUM

A

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D. D. D.

IS. NEWTONUS.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentiſque noſtræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Conderet, omnipotens ſibi Leges ipſe Creator
Dixerit, atque operum quæ fundamenta locarit.
Intima panduntur victi penetralia Cæli,
Nec latet, extremos quæ Vis circumrotet Orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Hinc patet, horrificis qua ſit via flexa Cometis:
Diſcimus hinc tandem, qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis eat, & cur ſubdita nulli
Hactenus Aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeent Nodi, curque Auges progrediantur.
Diſcimus, & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellat; feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alterniſve ruens ſpumantia littora pulſat.

Quæ

Quæ toties animos veterum torſere Sophorum,
Quæque Scholas hodie rauco certamine vexant,
Obvia conſpicimus; nubem pellente Matheſi:
Quæ ſuperas penetrare domos, atque ardua Cæli,
NEWTONI auſpiciis, jam dat contingere Templa.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires cognoſcite Mentis,
A pecudum vita longe longeque remotæ.
Qui ſcriptis primus Tabulis compeſcere Cædes,
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab Uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere Voces;
Humanam ſortem minus extulit; utpote pauca
In commune ferens miſeræ ſolatia vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita diæ
Clauſtra patent Naturæ, & rerum immobilis ordo;
Et quæ præteritis latuere incognita ſæclis.
Talia monſtrantem juſtis celebrate Camænis,
Vos qui cæleſti gaudetis nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia Veri,
NEWTONUM Muſis carum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit Numine mentem:
Nec fas eſt propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PRÆ-

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM Veteres Mechanicam (*uti Auctor est* Pappus) *in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint; & Recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu* Mathesin *excolere, quatenus ea ad* Philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres constituerunt:* Rationalem *quæ per Demonstrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad Practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique* Mechanica *nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas describere* Geometria *non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & Circulos describere Problemata sunt,*

sed

ſed non Geometrica. Ex Mechanica *poſtulatur horum ſolutio, in* Geometria *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud eſt quam* Mechanicæ univerſalis *pars illa quæ artem menſurandi accurate proponit ac demonſtrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue verſentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem,* Mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & Virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accurate propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elaſticam, reſiſtentiam Fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et ea propter, hæc noſtra tanquam Philoſophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut a Phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant Propoſitiones generales quas Libro primo & ſecundo pertractavimus. In Libro autem tertio Exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem Syſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per Propoſitiones in Libris prioribus Mathematice demonſtratas, derivantur vires Gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil ſuſpicer ea omnia*

nia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philoſophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, ſed etiam Auctor fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me Figuram Orbium cæleſtium impetraverat, rogare non deſtitit ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam Motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cæpiſſem quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliarum virium, & Figuras a corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant, (imperfecta cum ſint,) in Corollariis Propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſero inventa locis minus idoneis inſerere malui, quam numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus inveſtigentur, & benigne ſuppleantur, enixe rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio *S. Trinitatis*, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO.

IN hac Secunda Principiorum Editione, multa ſparſim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sectione II, *Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In Libri ſecundi Sectione* VII, *Theoria reſiſtentiæ Fluidorum accuratius inveſtigatur & novis Experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lunæ & Præceſſio Æquinoctiorum ex Principiis ſuis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO.

NEWTONIANÆ Philoſophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque deſideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex Indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philoſophiæ.

Qui Phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus Qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ Scholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos Effectus ex corporum ſingularibus Naturis oriri; at unde ſint illæ Naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; Sermonem quendam Philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, Philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt, rejecta Vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit Natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas Obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum

ſuarum fundamentum deſumunt ab Hypotheſibus, etiamſi deinde ſecundum leges Mechanicas accuratiſſime procedant; Fabulam quidem elegantem forte & venuſtam, Fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui Philoſophiam ſcilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem Principii loco aſſumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in Phyſicam recipiunt, niſi ut Quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque Methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam Phænomenis per Analyſin deducunt, ex quibus deinde per Syntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt Philoſophandi ratio longe optima, quam præ ceteris merito amplectendam cenſuit Celeberrimus Auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit Exemplum, Mundani nempe Syſtematis explicationem e Theoria Gravitatis feliciſſime deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus Ille & ſolus ex Apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis Viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo Principio ægre aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: Tibi potius, Benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus Tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut Argumenti ſumatur exordium a ſimpliciſſimis & proximis; deſpiciamus pauliſper qualis ſit in Terreſtribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cæleſtia, longiſſime a ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in Terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit Experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas relativa, non eſt vera Levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur a præpollente Gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitant in Terram, ita Terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; Gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur Terræ

totius

totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra Experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, Gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro Terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet Aeris reſiſtentia: accuratius autem comprobatur per Experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque Terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium Actionibus conflari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia Terreſtria ſe mutuo trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis ſit in Cælis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; Naturæ lex eſt ab omnibus recepta Philoſophis. Inde vero ſequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, Vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in Orbibus curvis revolventibus neceſſario aderit Vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter a Tangentibus deflectantur.

Jam

Jam illud concedi æquum eſt, quod Mathematicis rationibus colligitur & certiſſime demonſtratur; Corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano deſcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcunque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a Viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeſſo ſit apud Aſtronomos, Planetas primarios circum Solem, ſecundarios vero circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut Vis illa, qua perpetuo detorquentur a Tangentibus rectilineis, & in Orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in Orbitarum centris. Hæc itaque Vis non inepte vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, Centripeta; reſpectu autem corporis centralis, Attractiva; a quacunque demum cauſa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & Mathematice demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in Circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum a centro communi; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in Orbitis quæ ſunt Circulis finitimæ, & quieſcant Orbitarum Apſides; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in Planetis univerſis conſentiunt Aſtronomi. Itaque Vires centripetæ Planetarum omnium ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab Orbium centris. Si quis objiciat Planetarum, & Lunæ præſertim, Apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod Vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum Mathematicum inveniri poſſe & plane inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio Vis centripetæ Lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc Apſidum progreſſionem, non ex aberratione a duplicata proportione, ſed ex alia prorſus diverſa cauſa oriri, quemadmodum egregie commonſtratur in hac Philoſophia. Reſtat ergo ut Vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt verſus Solem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accurate ut quadrata diſtantiarum reciproce.

Ex

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat Planetas in Orbitis ſuis retineri per Vim aliquam in ipſos perpetuo agentem: conſtat Vim illam dirigi ſemper verſus Orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione qua diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtituta inter Planetarum Vires centripetas & Vim Gravitatis, annon ejuſdem forte ſint generis. Ejuſdem vero generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima eſt, Vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi a viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: Hoc utique conſequitur ex ratiociniis Mathematicis. Erit igitur Vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis, ad Vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, ut ſpatium quod tempore quam minimo deſcriberet Luna deſcendendo per Vim centripetam verſus Terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium quod eodem tempore quam minimo deſcribit grave corpus in vicinia Terræ, per Vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcus a Luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui Lunæ tranſlationem de Tangente, factam a Vi centripeta, metitur; atque adeo computari poteſt ex datis tum Lunæ tempore periodico tum diſtantia ejus a centro Terræ. Spatium poſterius invenitur per Experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis ad vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, erit ut quadratum ſemidiametri Terræ ad Orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis ad vim Lunæ centripetam prope Terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ ſuperficiem æqualis eſt vi Gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quam ex vi ſola Gravitatis. Conſtat igitur Vim illam centripetam, qua Luna perpetuo de Tangente vel trahitur vel impellitur & in Orbita retinetur, ipſam eſſe vim Gravitatis terreſtris ad Lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe Virtus extendat,

cum

cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutua, Terra viciſſim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philoſophia, ubi agitur de Maris æſtu & Æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis Gravitatis decreſcat in majoribus a Tellure diſtantiis. Nam cum Gravitas non diverſa ſit a Vi centripeta Lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & Gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & ſecundariorum circa Jovem & Saturnum ſunt Phænomena generis ejuſdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum Solis, ſecundariorum verſus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta verſus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis Lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a Terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra viciſſim in Lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim in ſecundarios; ſic & omnes primarii in Solem, & Sol viciſſim in primarios.

Igitur Sol in Planetas univerſos gravitat & univerſi in Solem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum Solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipſos. Secundarios vero Planetas in Solem gravitare abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus Lunaribus; quarum accuratiſſimam Theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus Operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu Cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt ut Globum ejus, in Periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam ab Aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per Obſervationes certiſſime demonſtratam, Præſtantiſſimo noſtro Auctori debemus. Patet

igitur

igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero Phænomenis manifestum est & Mathematice comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum in datis distantiis & in eodem fere plano collocata, sed etiam ad Cometas in diversissimis Cælorum regionibus & in diversissimis distantiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero sequitur, Planetas & Cometas universos se mutuo trahere, & in se mutuo graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognita, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo Apsidum, qui supra memoratus est, quique a causa consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cælestia, quæ Solem comitantur, se mutuo attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum supra de Terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere Globos eadem lege trahentes, Mathematice demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravitas sit causa descensus Lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si Gravitas mutua fuerit inter Lapidem & Terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva Lapidis & Terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac Regula fundatur omnis Philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possimus de Universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde vero non

niſi per hanc Regulam de rerum univerſarum natura judicamus.

Jam cum Gravia ſint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cælis reperiuntur, de quibus Experimenta vel Obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint Extenſa, Mobilia, & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint Gravia. Corporum Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non niſi per Experimenta innoteſcunt: eodem plane modo Gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus Obſervationes habemus, Extenſa ſunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Extenſa eſſe & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt Gravia, de quibus Obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Gravia eſſe. Si quis dicat corpora Stellarum inerrantium non eſſe Gravia, quandoquidem eorum Gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit neque Extenſa eſſe, nec Mobilia, nec Impenetrabilia, cum hæ Fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? Inter primarias qualitates corporum univerſorum vel Gravitas habebit locum; vel Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum Gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum Extenſionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet Occultum eſſe quid, perpetuo argutari ſolent; occultas vero cauſas procul eſſe ablegandas a Philoſophia. His autem facile reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per Obſervationes clariſſime demonſtratur, ſed has ſolum quarum occulta eſt & ficta exiſtentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cæleſtium; ſiquidem ex Phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem revera exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas; qui neſcio quos Vortices, materiæ cujuſdam prorſus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur e Philoſophia, quod cauſa ipſius Gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatu-

ant

ant abſurdi, unde totius tandem Philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent a compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? ſimul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, uſque dum a cauſis omnibus vacua fuerit & probe purgata Philoſophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cum in Phyſica præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa Philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex cauſis Mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura Philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota Phyſica cæleſtis vel ideo minus placet, quod cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque Philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per Phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis vere exiſtentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit Summus opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut a pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit Effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua vere atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in Philoſophia vera. In Horologiis automatis idem Indicis horarii motus vel ab appenſo Pondere vel ab intus concluſo Elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum Horologium revera ſit inſtructum Pondere;

ridebitur qui finget Elaterem, & ex Hypotheſi ſic præpropere conficta motum Indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam Machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motus propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de Philoſophis illis, qui materia quadam ſubtiliſſima Cælos eſſe repletos, hanc autem in Vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam ſi Phænomenis vel accuratiſſime ſatisfacere poſſent ex Hypotheſibus ſuis; veram tamen Philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has revera exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum Attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam oſtenſum fuerit, qua ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per Vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maxime conceſſerimus. Non autem concedimus: Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore noſtro abunde quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomniis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur a Vorticibus; oportet corpora delata & Vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque curſus determinatione moveri, & eandem habere denſitatem vel eandem Vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat vero Planetas & Cometas, dum verſantur in iiſdem regionibus Cælorum, velocitatibus variis variaque curſus determinatione moveri. Neceſſario itaque ſequitur, ut Fluidi cæleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias a Sole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint Planetæ; alia, ut tranſire poſſint Cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cæleſtia non deferri a materia Vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque Vortice, ſed a pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium Soli circumjectum pervadant.

Si plures Vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuo penetrare, motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui

ſunt ſumme regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis, nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur, nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sane ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficilius explicantur, quam veri illi motus Planetarum & Cometarum; fruſtra mihi videntur in Philoſophiam recipi: omnis enim Cauſa debet eſſe Effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa Fabularum licentia, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmoſphæris, adinſtar Telluris noſtræ; quæ quidem Hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur quam Hypotheſis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmoſphæras, ex natura ſua, circa Solem moveri & Sectiones Conicas deſcribere; qui ſane motus multo facilius concipi poteſt, quam conſimilis motus Vorticum ſe invicem permeantium. Denique Planetas ipſos & Cometas circa Solem deferri ab Atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, & ob repertas motuum cæleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc Fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram Fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quam Hypotheſis Atmoſphærarum Hypotheſi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in Parabola moti deflexionem a curſu rectilineo oriri a Gravitate lapidis in Terram, ab occulta ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris, Philoſophus cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus quæ proxime contingunt Telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas deſcribere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo ſubtili natat; & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem una ſemitam deſcribere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabola moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce Philoſophi ingenium, ex cauſis Mechanicis, materia ſcilicet & motu, phænomena Naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine Mathematico qualitates occultas, e Philoſophia feliciter excluſas, denuo revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Sum-

Summa rei huc tandem redìt: Cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant. Moventur in Orbibus Conicis, hi orbes ſunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes Cælorum partes, & Planetarum regiones liberrime pertranſeunt, & ſæpe contra Signorum ordinem incedunt. Hæc Phænomena certiſſime confirmantur ex Obſervationibus Aſtronomicis: & per Vortices nequeunt explicari: Imo, ne quidem cum Vorticibus Planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus e Cælis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem a Vorticibus devehuntur; Vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque Planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac Planeta; uti ſupra dictum eſt. Itaque materia illa omnis quæ contigua eſt Orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus denſitatem: quæ vero jacet intra Orbem magnum atque Orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio Vorticis permanere poſſit, debent partes minus denſæ centrum occupare, magis denſæ longius a centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, oportet partium Vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde vero ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minus denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedant vi majori, qua partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minus denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius Vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina Fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut Fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi Gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omnino dicendum eſt, denſiores Vorticis partes majore vi centrifuga petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars Vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, denſitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam denſitas & vis inertiæ Telluris: inde vero Cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valde admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus ſiſtere atque abſorbere poſſe merito videatur. Conſtat autem ex motu Cometarum

metarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis Inertiæ. Nam resistentia Mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in Fluidis vulgo notis, nisi valde tenacia fuerint adinstar Olei & Mellis. Resistentia quæ sentitur in Aere, Aqua, Hydrargyro, & hujusmodi Fluidis non tenacibus fere tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente Fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissime demonstratum est ab Auctore nostro in peregregia Resistentiarum Theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac secunda vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut Fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem Fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a Fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio Fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in Fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa qua Fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in Fluidum, id est, nisi velocitas absoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta Fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest Fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cælestis nullam esse vim inertiæ, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim qua motus communicetur, cum nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim qua mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis qua motus communicetur: nullam esse omnino efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc Hypothesin, quæ fundamento plane destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & Philosopho prorsus

ſus indignam.' Qui Cælos materia fluida repletos eſſe volunt, hanc vero non inertem eſſe ſtatuunt; Hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nulla ſecerni poſſit ab inani Spatio; diſputatio tota ſit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeo uſque dediti Materiæ, ut Spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus Naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab Æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex Cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa Mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quadam Naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas Gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant Fato univerſa regi, non Providentia; Materiam ex neceſſitate ſua ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed Obſervando atque Experiendo addiſcere debemus. Qui veræ Phyſicæ principia Legeſque rerum, ſola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere Mundum ex neceſſitate fuiſſe, Legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem Dei conſtitutus ſit ordo Naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum,

miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera Philoſophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſime cernuntur Conſilium optimum & Dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibuſdam forſan, hominibus minus grata ſint futura. His vel Miracula vel Qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent: verum nomina malitioſe indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere Philoſophiam in Atheiſmo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda Philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos Judices præſtantiſſima Philoſophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Obſervationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro Illuſtriſſimi noſtri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, merito admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulo profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergo reſeratis, aditum Nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis Mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitius perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, Rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque Naturæ majeſtatem propius jam licet intueri, & dulciſſima contemplatione frui, Conditorem vero ac Dominum Univerſorum impenſius colere & venerari, qui fructus eſt Philoſophiæ multo uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur Eximium NEWTONI Opus adverſus Atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam Catervam tela deprompſeris. Hoc ſenſit pridem, & in pereruditis Concionibus Anglice Latineque editis, primus egregie demonſtravit Vir in omni Literarum genere præclarus idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi ſui & Academiæ noſtræ magnum Ornamentum, Collegii noſtri *S. Trinitatis* Magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri

debeo: Huic & Tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore Celeberrimi Auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud Posteros censeri non minoris æstimat, quam propriis Scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) Amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum Exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coemenda supereſſent; suasit Ille crebris efflagitationibus & tantum non objurgando perpulit denique Virum Præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa Insignem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: Mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus.*

INDEX

INDEX CAPITUM TOTIUS OPERIS.

PAG.

DEFINITIONES. 1
AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. 12

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECT. I. *De Methodo rationum primarum & ultimarum.* 24
SECT. II. *De inventione Virium centripetarum.* 34
SECT. III. *De motu corporum in Conicis sectionibus eccentricis.* 48
SECT. IV. *De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.* 59
SECT. V. *De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.* 66
SECT. VI. *De inventione Motuum in Orbibus datis.* 97
SECT. VII. *De corporum Ascensu & Descensu rectilineo.* 105
SECT. VIII. *De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.* 114
SECT. IX. *De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apsidum.* 121
SECT. X. *De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.* 132
SECT. XI. *De Motu corporum Viribus centripetis se mutuo petentium.* 147
SECT. XII. *De corporum Sphæricorum Viribus attractivis.* 173

SECT.

SECT. XIII. *De corporum non Sphæricorum Viribus attractivis.* 192
SECT. XIV. *De Motu corporum Minimorum, quæ Viribus centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 203

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECT. I. *DE Motu corporum quibus resistitur in ratione Velocitatis.* 211
SECT. II. *De Motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione Velocitatis.* 220
SECT. III. *De Motu corporum quibus resistitur partim in ratione Velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.* 245
SECT. IV. *De corporum Circulari motu in Mediis resistentibus.* 253
SECT. V. *De densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.* 260
SECT. VI. *De Motu & Resistentia corporum Funependulorum.* 272
SECT. VII. *De motu Fluidorum & resistentia Projectilium.* 294
SECT. VIII. *De motu per Fluida propagato.* 329
SECT. IX. *De motu Circulari Fluidorum.* 345

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS.

REGULÆ PHILOSOPHANDI 357
PHÆNOMENA 359
PROPOSITIONES 362
SCHOLIUM GENERALE. 481

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AER, denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem ſub nomine Corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque Pondus. Nam Ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta Pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas Motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; adeoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus eſt, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIONES.

DEFINITIO III.

Materiæ Vis Insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab Inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo Vis Inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estq; exercitium ejus sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neq; semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis Impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripeta.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunq; tendunt.

Hujus generis est Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, qua ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunq; sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus,

actus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoq; fortius quo celerius revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuò retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideò Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi Gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cælos; idque uniformi cum motu, ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo minor erit ejus gravitas vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a curſu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate ſecundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quaſi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quaſi decuplo longius: ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam deſcriberet, ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret priuſquam caderet; vel denique ut in terram nunquam caderet, ſed in cælos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua Projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet & terram totam circuire, poteſt & Luna vel vi gravitatis, ſi modo gravis ſit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi ſemper a curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & abſque tali vi Luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret Lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire Vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri poſſit; & viciſſim invenire Viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egreſſum a data vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIONES.

Definitiones.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ Quantitas Abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro Efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix eſt ipſius menſura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis a globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata Aeris reſiſtentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ Quantitas Motrix eſt ipſius menſura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc Quantitas eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, qua deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum & propenſionem totius in centrum ex propenſionibus omnium partium compoſitam; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad Centrum, tanquam cauſa aliqua præditum, ſine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro

centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejuſdem materiæ. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulſus, vel Propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuo promiſcue uſurpo; has vires non Phyſice ſed Mathematice tantum conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem Phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere & Phyſice tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Nam Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notiſſima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spa-

DEFINITIONES.

II. Spatium Abſolutum, natura ſua abſque relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cæleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, movetur; ſpatium Aeris noſtri, quod relative & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtq; pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; adeoq; locus totius idem cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies Vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra vere quieſcit, corpus quod relative quieſcit in navi, movebitur vere & abſolute ea cum velocitate qua navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terra: & ſi corpus etiam movetur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terra, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoq; feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem

entem versus cum velocitatis parte una: movebitur Nauta vere & absolute in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem versus cum velocitatis partibus novem. DEFINITIONES.

Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore motus cæleſtes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis Absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiæ rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantiis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur; nec incommode in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possible sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longin-

quum

DEFINITIONES.

quum illud datam positionem servet necne; quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absq; translatione de vicinia corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur una Locatum: adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest absq; viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

mantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit. DEFINITIONES.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit vas, ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim a medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Igitur conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cælos noſtros infra Cælos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; ſingulæ Cælorum partes, & Planetæ qui relative quidem in Cælis ſuis proximis quieſcunt, moventur

DEFINITIONES.

tur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaque cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum: est propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si

atten-

attenderetur ad filum, & deprenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui. DEFINITIONES.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

LEX

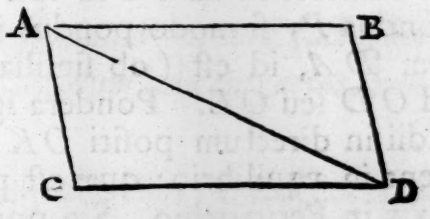
LEX III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſola *M* in loco *A* impreſſa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi ſola *N* in eodem loco impreſſa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis per Legem 11 nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*; ſive vis *N* imprimatur, ſive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem 1.

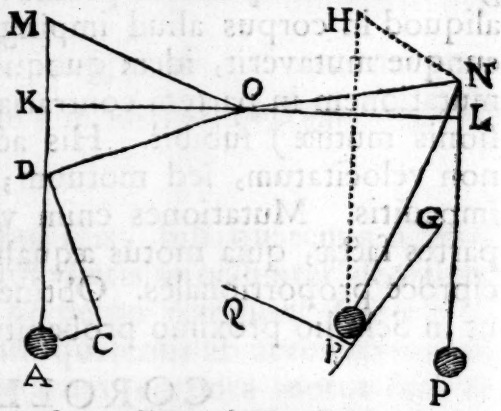
COROL-

AXIOMATA, SIVE

COROLLARIUM II.

Et hinc patet compositio vis directæ AD *ex viribus quibusvis obliquis* AB *&* BD, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* AD *in obliquas quascunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela sit *AC*, & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est, idem atque pondus *P*, si modo pondus illud sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.



Quod si pondus *p* ponderi *P* æquale partim suspendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, posterior plano *pG* perpendicularis; & si vis ponderis *p* deorsum tendens, exponatur per lineam *pH*, resolvi potest hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare esset planum aliquod *pQ*, secans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* solummodo incumberet; urgeret

geret illud hæc plana viribus pN, HN perpendiculariter, nimirum planum $p\mathcal{Q}$ vi pN, & planum pG vi HN. Ideoque ſi tollatur planum $p\mathcal{Q}$, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi pN, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis PN, ut pN ad pH. Ideoque ſi pondus p ſit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum pN, AM a centro rotæ, & ratione directa pH ad pN; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque adeo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus p urget planum $p\mathcal{Q}$ ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam pH in plano, ut pN and pH; atque ad vim, qua urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur Corollarii hujus latiſſime patet, & late patendo veritatem ſuam evincit; cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tenſis & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſque potentiis Mechanicis componi ſolent, ut & vires Tendinum ad animalium oſſa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum A ſit triplo majus corpore ſphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B ſequatur in eadem recta cum velocitatis

Axiomata, sive

locitatis partibus decem, adeoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum una parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17−1 & 18−2 semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROL-

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc poſtea in Lemmate XXIII demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri communis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis omnino vacant, adeoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cum diſtantiæ centrorum utriuſque a communi gravitatis centro ſint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus

AXIOMATA, SIVE mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales; adeoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſque motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroq; caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem 11 æquales erunt congreſſuum effectus in utroq; caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

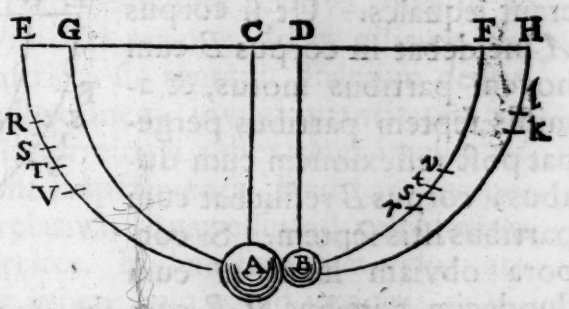
Si corpora moveãtur quomodocunq; inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum)

rum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem 11. adeoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe. LEGES MOTUS.

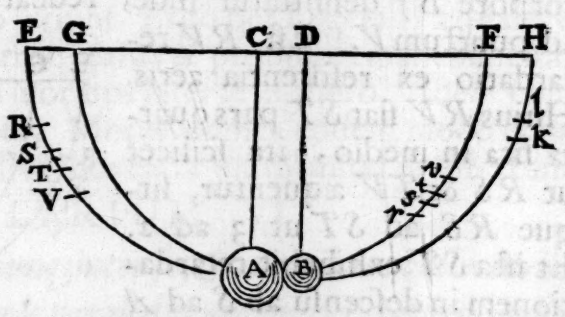
Scholium.

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per Leges duas primas & Corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum Gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Ab iiſdem Legibus & Corollariis pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium Pendulorum, ſuffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iiſdem & Lege tertia *Chriſtophorus Wrennus* Eques Auratus, *Johannes Walliſius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum duorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum: quod etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum, ut hoc experimentum cum Theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio cum reſiſtentiæ aeris, tum etiam vis Elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, a centris *C*, *D*. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radiis *CA*, *DB* biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut *RS* & *TV* æquentur, ſitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et iſta *ST* exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proxime. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, abſque errore ſenſibili, tanta erit ac



Axiomata, sive

si in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus quem cadendo descripsit, Propositio est est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *st* pars quarta ipsius *rv* sita in medio, ita videlicet ut *rs* & *tu* æquentur; & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *TA* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *tA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusq; tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant, quod æquales erant mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque adeo quod actio & reactio semper erant æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim, & restabit nihil:



nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandam plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A B*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

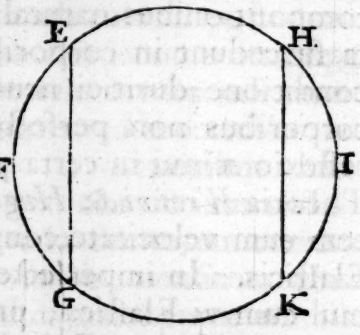
Porro nequis objiciat Regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi Regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elaſticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte Elaſticis. In imperfecte Elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi Elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo Pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant Experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

In

AXIOMATA, SIVE

In Attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A* quam pressione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus *B*, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & Ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aqua stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter Terram & ejus partes, mutua est. Secetur Terra *FI* plano quovis *EG* in partes duas *EGF* & *EGI*: & æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio *HK* quod priori *EG* parallelum sit, pars major *EGI* secetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis sit parti prius abscissæ *EFG*: manifestum est quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, & quiescet. Pars autem extrema *HKI* toto suo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* summa *EGI* tendit versus partem tertiam *EGF*, æqualis est ponderi partis *HKI*, id est ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, Terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic in movendis Instrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium

virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oſcillante Libra ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe Libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent quæ ſunt reciproce ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In Horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi data ſuperandi. Nam ſi Machinæ ita formentur, ut velocitates Agentis & Reſiſtentis ſint reciproce ut vires; Agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certe ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni ea reſiſtentia, vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Ceterum Mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantum oſtendere, quam late pateat quamque certa ſit Lex tertia Motus. Nam ſi æſtimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate

De Motu Corporum

tate conjunctim; & similiter Resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.

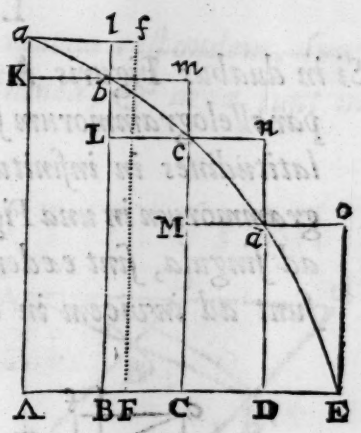
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

Si negas; fiant ultimò inequales, & sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia D: contra hypothesin.

LEMMA

LEMMA II.

Si in Figura quavis AacE, *rectis* Aa, AE *& curva* acE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *Figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem Figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam Figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl, Lm, Mn, Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum summa *Aa*, id est, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma 1) Figura inscripta & circumscripta & multo magis Figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q.E.D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia Figuræ inscriptæ & Figuræ circumscriptæ; at latitudine sua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evanes-

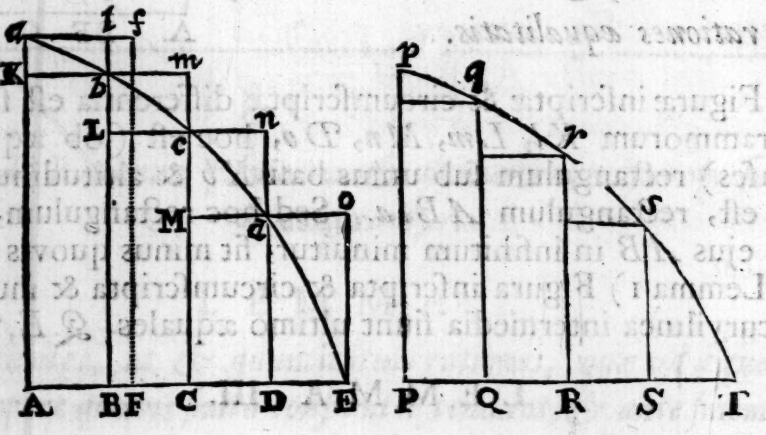
centium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum Figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & Figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus Figuris AacE, PprT, *inscribantur* (*ut supra*) *duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod Figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita Figura ad Figuram; existente nimirum Figura priore (per Lemma 111) ad summam priorem, & Figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus Figuris sumantur parallelo-

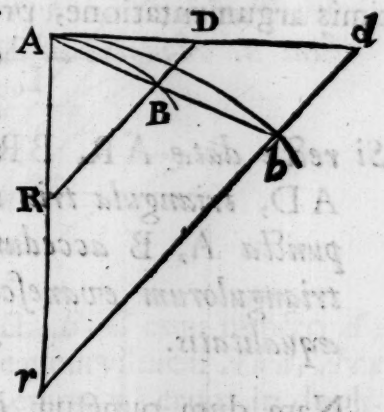
rallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium Figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.

Si arcus quilibet poſitione datus AB *ſubtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coïant; dico quod angulus* BAD, *ſub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evaneſcet.*



Nam ſi angulus ille non evaneſcit, continebit arcus *AB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad ad punctum *A* non erit continua, contra hypotheſin.

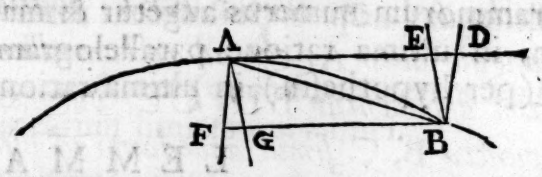
LEMMA VII.

Iiſdem poſitis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *AB* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & ſecanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Ab* ſemper ſimilis arcui *AB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma ſuperius, evaneſcet; adeoque rectæ ſemper finitæ *Ab*, *Ad* & arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *AB*

evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* tranſeuntem perpetuo ſecans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evaneſcentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem ſemper habet æqualitatis ad *AD*.



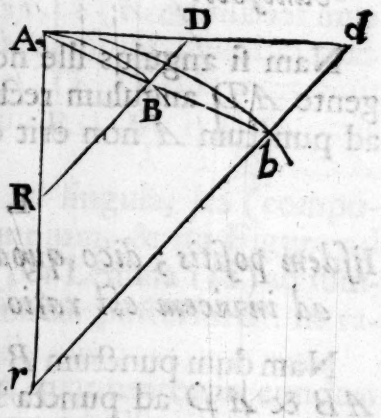
Corol. 2. Et ſi per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, ſecantes tangentem *AD* & ipſius parallelam *BF*; ratio ultima abſciſſarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* AB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* ARB, ARB, ARD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligãtur ſemper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *AB* ſimilis ſemper ſit arcus *Ab*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*

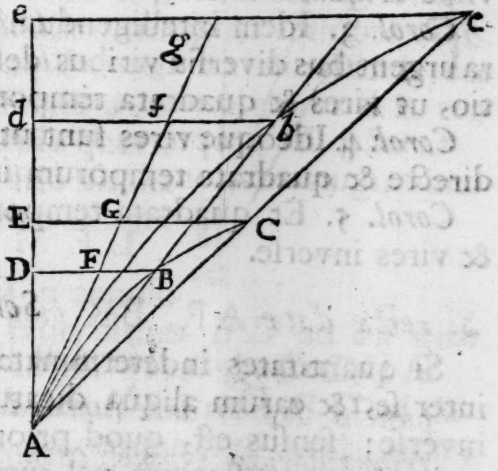


Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C; *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*



Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*: adeoque (per Lemma v) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per Lemma ix) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Corol.

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium Figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium Errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum a Figurarum ſimilium locis illis ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus abſque viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles Figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directe & quadrata temporum inverſe.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directe & vires inverſe.

Scholium.

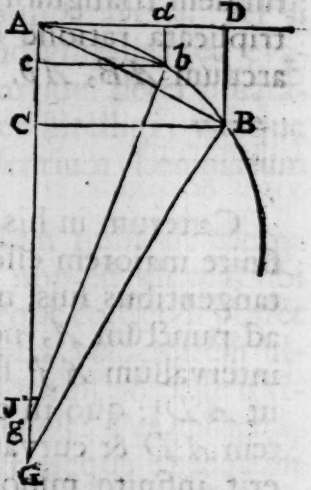
Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciproca. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directe & C directe & D inverſe: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$, hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Caſ. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, ſubtenſa arcus *AB*. Huic ſubtenſæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concur-

concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, ſitque f interſectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt uſque ad A. Manifeſtum eſt quod diſtantia Gf minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg tranſeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$, & Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$, adeoque ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam Gf aſſumi poteſt minor longitudine quavis aſſignata, fieri poteſt ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis aſſignata. Eſt ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad Ab *quad.* æqualis rationi ultimæ BD ad bd. *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoque eadem ac AB *quad.* ad Ab *quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, ſed recta BD ad datum punctum convergente, vel alia quacunque lege conſtituatur; tamen anguli D, d communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ultimo æquales erunt, per Lem. 1, & propterea lineæ BD, bd ſunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad, arcus AB, Ab, & eorum ſinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ BD, bd.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ BD, bd.

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, Adb ſunt ultimo in triplicata ratione laterum AD, Ad, inque ſeſquiplicata laterum DB, db; utpote in compoſita ratione laterum AD, & DB, Ad & db exiſtentia. Sic & triangula ABC, Abc ſunt ultimo in triplicata ratione laterum BC, bc. Rationem vero Seſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicata componitur, quamque alias Seſquialteram dicunt.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 5. Et quoniam $\mathcal{D}B$, db sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum $A\mathcal{D}$, Ad: erunt areæ ultimæ curvilineæ $A\mathcal{D}B$, Adb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum $A\mathcal{D}B$, Adb; & segmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium $A\mathcal{D}$, Ad; tum chordarum & arcuum AB, Ab.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos Circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum $A\mathcal{J}$ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest $\mathcal{D}B$ ut $A\mathcal{D}^3$: quo in casu Circulus nullus per punctum A inter tangentem $A\mathcal{D}$ & curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor Circularibus. Et simili argumento si fiat $\mathcal{D}B$ successive ut $A\mathcal{D}^4$, $A\mathcal{D}^5$, $A\mathcal{D}^6$, $A\mathcal{D}^7$, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat $\mathcal{D}B$ successive ut $A\mathcal{D}^2$, $A\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{4}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{5}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{6}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum Circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos $A\mathcal{D}^1$ & $A\mathcal{D}^2$ inseratur series $A\mathcal{D}^{\frac{12}{6}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{11}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{10}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{9}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{8}{2}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{8}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{11}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{14}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Præmisi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum Indivisibilium. Sed quoniam durior est Indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus Geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum eva-

evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum Indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium Lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quacum eſſe (vel augeri & minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex Indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de Incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verum hæc Objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant; & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero

De Motu Corporum

transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

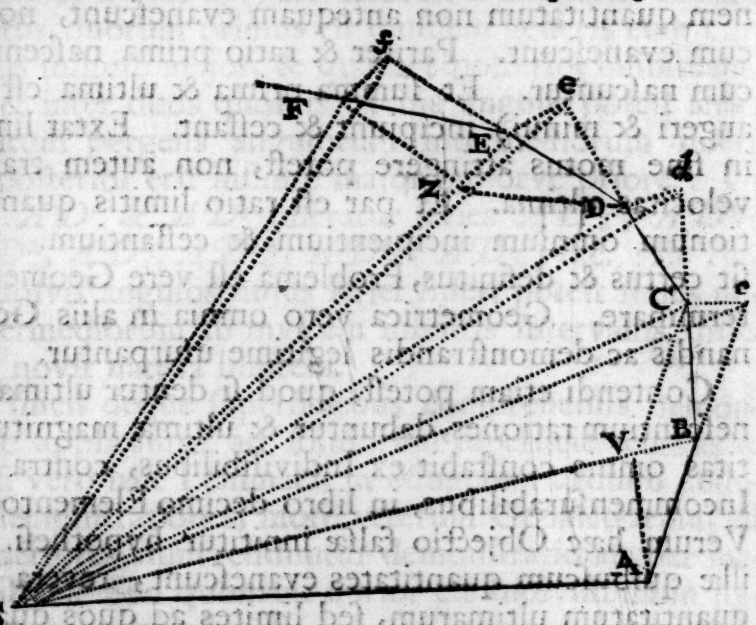
SECTIO II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. 1.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipsi *SB* parallela agatur *cC*, occurens *BC* in *C*; & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in *C*, in



eodem

eodem plano cum triangulo ASB. Junge SC; & triangulum SBC, ob parallelas SB, Cc, æquale erit triangulo SBc, atque adeo etiam triangulo SAB. Simili argumento si vis centripeta succesſive agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipſi SCD, & SEF ipſi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indeſinenter; areæ vero quævis deſcriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt in ſpatiis non reſiſtentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut ſunt baſes æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ baſes ſunt reciproce ut perpendicula in ipſas demiſſa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus ab eodem corpore ſucceſſive deſcriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABCU$, & hujus diagonalis BU in ea poſitione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus deſcriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABCU$, $DEFZ$; vires in B & E ſunt ad invicem in ultima ratione diagonalium BU, EZ, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus Bc, BU & Ef, EZ: atqui BU & EZ, ipſis Cc & Ff æquales, in Demonſtratione Propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in B & E, ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in ſpatiis non reſiſtentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant

De Motu Corporum

ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. IV, ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima SAB, SBC, SCD, &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco B ſecundum lineam parallelam ipſi cC (per Prop. XL, Lib. 1 Elem. & Leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam BS; & in loco C ſecundum lineam ipſi dD parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam SC, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In Spatiis vel Mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In Mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, virium directiones declinant a concurſu radiorum verſus plagam in quam fit motus.

Scholium

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat perpetuo secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. VI.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum *T* sibimet ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id est, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus

De Motu Corporum

corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales; & corpus illud alterum T vel quiescit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est Centri, quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita sua retinetur: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. 11. & Corol. 11. Prop. 1; & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. 1v. Prop. 1; hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. v11: & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur, cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum: hoc est, ut cum Geometris loquar, vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse.

Corol.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione velocitatum inverſe, vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc eſt, in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde, ſi tempora periodica æquentur & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Cor. 4. Si & tempora periodica & velocitates ſint in ratione ſubduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: & contra.

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut Radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciproce ut Radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut Radii poteſtas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex Demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum a centris pro radiis uſurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Caſus Corollarii ſexti obtinet in corporibus cæleſtibus, (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris, decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro

De Motu Corporum

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea Gravitatis. Nam ſi corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem, ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus Corol. IX. Et hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo Tractatu *de Horologio Oſcillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur Polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus, in polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos a circulo reflectatur; vis qua ſingulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas: adeoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium: adeoque, ſi polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis eſt vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

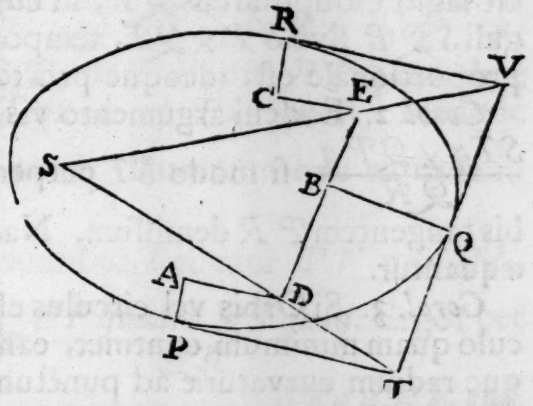
PROPOSITIO. V. PROBLEMA I.

Data quibuſcunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id eſt, ita ut ſit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P, & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentes in D & E: Et actæ TD, VE concurrent in centro quæſito S.

Nam

Nam perpendicula a centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demissa (per Corol. 1. Prop. I.) sunt reciproce, ut velocitates corporis in punctis *P* & *V*; adeoque per constructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T*, sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*



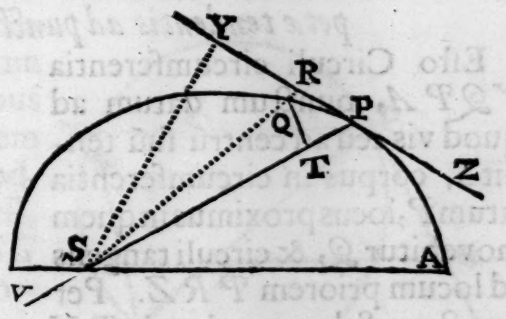
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quàm minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4 Prop. 1,) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2 & 3, Lem. XI,) adeoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q. E. D.*

Idem facile demonstratur etiam per Corol. 4 Lem. X.

Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *APQ*, tangat verò recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto *Q* agatur *QR* distantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad distantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimò fit ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Nam *QR* æqualis



est sagittæ dupli arcus QP, in cujus medio est P, & duplum trianguli SQP sive $SP \times QT$, tempori quo arcus iste duplus describitur proportionale est, ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{SY q \times QP q}{QR}$, si modo SY perpendiculum sit a centro virium in Orbis tangentem PR demissum. Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si Orbis vel circulus est, vel angulum contactus cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum contactus P; & si PV chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $SY q \times PV$. Nam PV est $\frac{QP q}{QR}$.

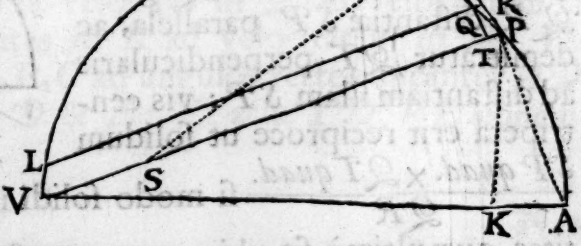
Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum SY per Corol. 1 Prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu rectilineo perpetuò retractum in figuræ illius perimetro detinebitur eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SP q \times QT q}{QR}$ vel solidum $SY q \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto Circuli circumferentia $VQPA$, punctum datum ad quod vis ceu ad centrũ suũ tendit S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q, & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV, & acta circuli diametro VA jungatur AP, & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z,



ac

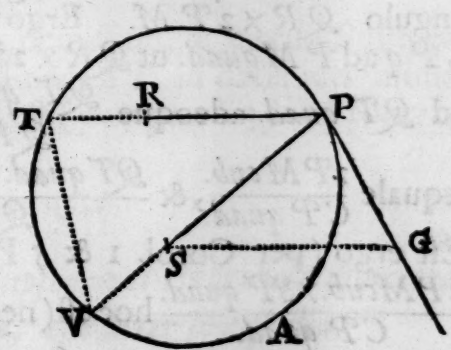
ac denique per punctum Q agatur LR quæ ipsi SP parallela sit & occurrat tum circulo in L tum tangenti PZ in R. Et ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$ &, punctis P & Q coeuntibus, scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AV\ quad}$ id est, (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY, & ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY, ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$ hoc est, ob datam AV, reciproce ut $SPq \times PV\ cub.$ *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum S ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis a secundo virium centro parallela est. Nam, per constructionem hujus Propositionis, vis prior est ad vim posteriorem, ut $RPq \times PT\ cub.$ ad $SPq \times PV\ cub.$



De Motu Corporum

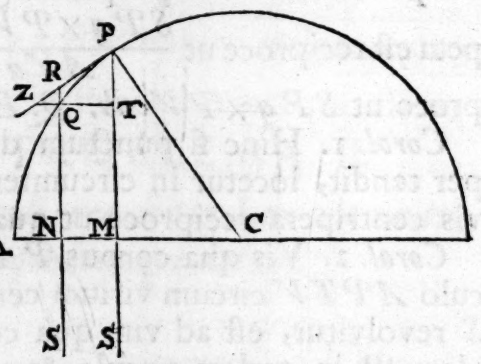
id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$ sive (ob similia triangula PSG, TPV) ad $SG\,cub.$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in Orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RPq$ contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro S & quadrato distantiæ ejus a secundo virium centro R ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a secundo virium centro distantiæ RP parallela est. Nam vires in hoc Orbe, ad ejus punctum quodvis P, eædem sunt ac in Circulo ejusdem curvaturæ.

PROPOSITIO. VIII. PROBLEMA. III.

Moveatur corpus in Circulo PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A Circuli centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N, & jungatur CP. Ob similia triangula CPM, PZT & RZQ est CPq ad PMq ut PRq ad QTq & ex natura Circuli PRq æquale est rectangulo $QR \times RN + QN$ sive coeuntibus punctis P, Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo est CPq ad $PM\,quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT\,quad.$ adeoque $\frac{QT\,quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\,cub.}{CP\,quad.}$, & $\frac{QT\,quad. \times SP\,quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\,cub. \times SP\,qu.}{CP\,quad.}$



Est ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$ hoc est (neglecta ratione determinata $\frac{2SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciproce ut $PM\,cub.$ *Q. E. I.*

Idem facile colligitur etiam ex Propositione præcedente.

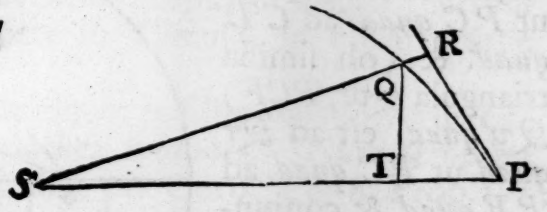
Scho-

Scholium.

Et ſimili argumento corpus movebitur in Ellipſi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in Spirali P Q S *ſecante radios omnes* S P, S Q, *&c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.*



Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc eſt ut SP. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR ſubtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipſius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut SP. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut $SP\ cub.$ adeoque (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut cubus diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Perpendiculum SY in tangentem demiſſum, & circuli Spiralem tangentis chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque $SP\ cub.$ eſt ut $SYq \times PV$, hoc eſt (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipſeos vel Hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta, eſſe inter ſe æqualia.

Conſtat ex Conicis.

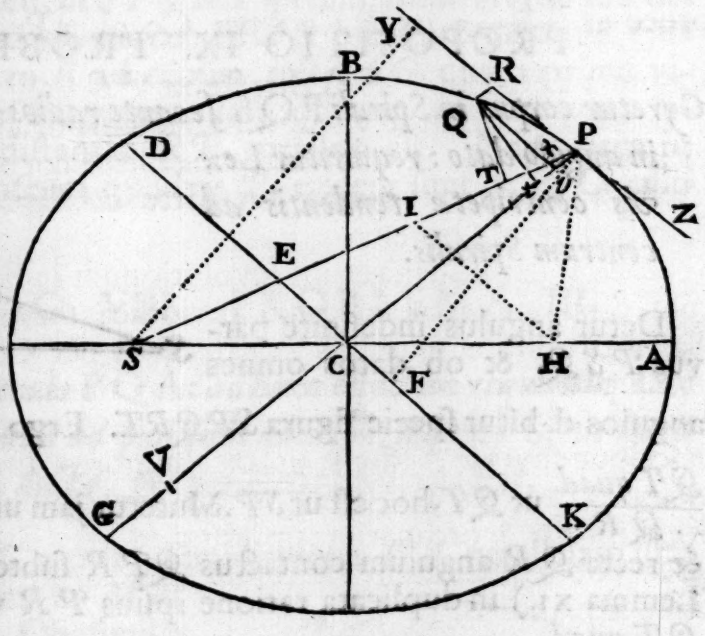
PRO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO X. PROBLEMA. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.

Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex Conicis) PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* eſt ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$.



Scribe QR pro Pv, & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis P & Q coeuntibus, $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in ſe mutuo, fiet $\frac{Qt\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Eſt ergo (per Corol. 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id eſt (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In PG ab altera parte puncti t poſita intelligatur tu æqualis ipſi tv; deinde cape uV quæ ſit ad vG ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex Conicis eſt Qv *quad.* ad PvG, ut DC *quad.* ad PC *quad:* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chordæ

dæ arcus PQ erit æquale rectangulo VPv; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in P & transit per punctum Q, transibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & hic circulus ejusdem erit curvaturæ cum sectione conica in P, & PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus P in Ellipsi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per Corol. 3 Prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro Ellipseos: & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in Circulo, in quem utique Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsibus similibus æqualia sunt per Corol. 3 & 8, Prop. IV: in Ellipsibus autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon areæ totæ directe & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est, ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse; hoc est, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipsis, centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola; & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est Theorema *Galilæi*. Et si coni sectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipsi, si vires tendunt ad centrum figuræ in Abscissa positum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinatarum ad Abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia: sic etiam in figuris universis, si Ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abscissa positum tendentes augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

SECTIO

De Motu Corporum

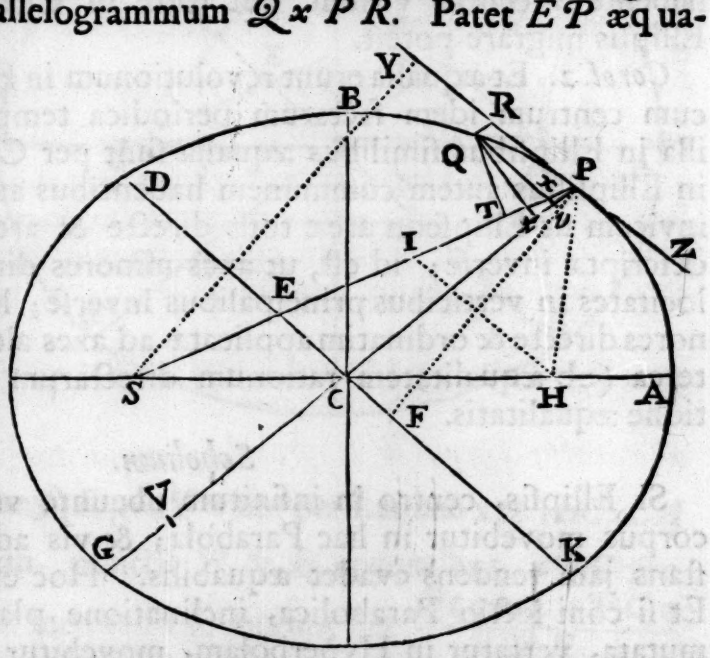
SECTIO III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

Eſto Ellipſeos umbilicus *S*. Agatur *SP* ſecans Ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *Qx PR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico *H* linea *HI* ipſi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* ſemiſumma ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipſarum *PS*, *PH*, quæ cõjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\,quad.}{AC}$) dicto *L*, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut *QR* ad *Pv*, id eſt ut *PE* ſeu *AC* ad *PC*; & $L \times Pv$ ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad*; & (per Corol. 2 Lem. VII.) *Qv quad.* ad *Qx quad*, punctis *Q* & *P* coeuntibus, eſt ratio æqualitatis; & *Qx quad.* ſeu *Qv quad.* eſt ad *QT quad.* ut *EP quad.* ad *PF quad*, id eſt ut *CA quad.* ad *PF quad.* ſive (per Lem XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad *QT quad.* ut $AC \times L \times PC q. \times CD q.$ ſeu $2CB q. \times PC q. \times CD q.$ ad $PC \times Gv \times CD q. \times CB q.$ ſive ut 2*PC* ad *Gv*.



Sed,

Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquãtur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$ & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq. \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$. id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q.E.I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum Ellipseos tendens, qua corpus P in Ellipsi illa revolvi potest, sit (per Corol. 1 Prop. X) ut CP distantia corporis ab Ellipseos centro C; ducatur CE parallela Ellipseos tangenti PR: & vis qua corpus idem P, circum aliud quodvis Ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\,cub.}{SPq}$ (per Corol. 3 Prop. VII,) hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q.E.I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus ceteros demonstratione confirmare.

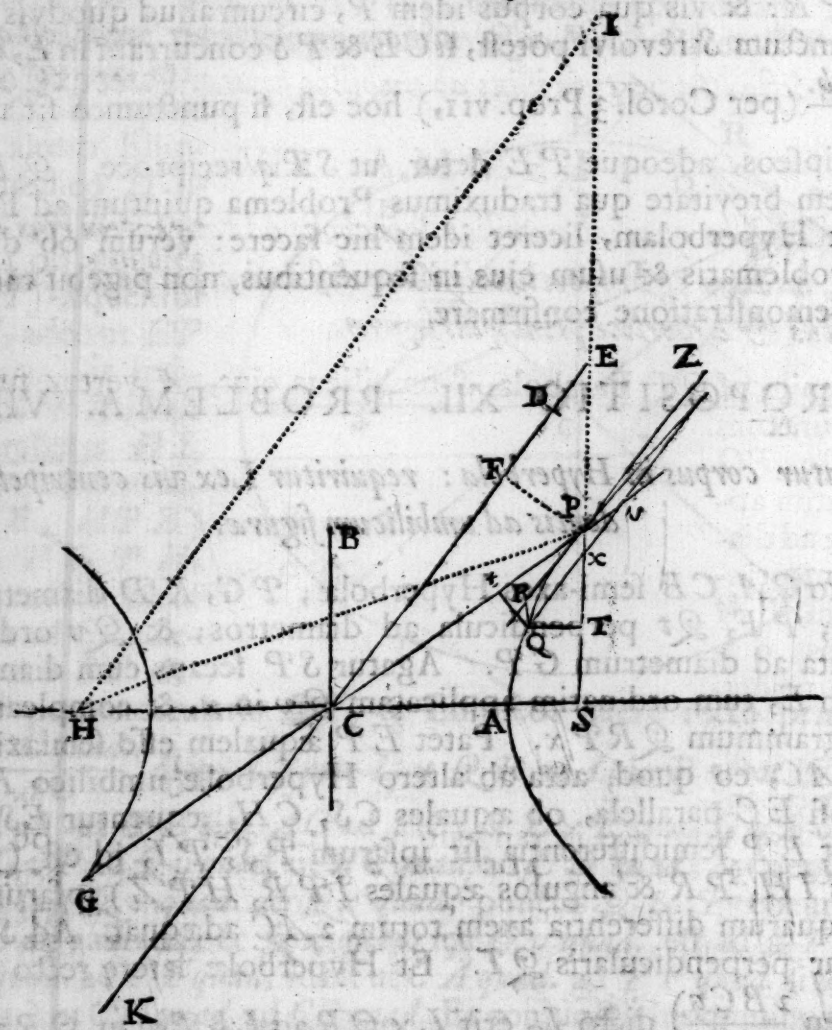
PROPOSITIO XII. PROBLEMA. VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB semi-axes Hyperbolæ; PG, KD diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP secans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id est, ut PE seu AC ad PC; Et $L \times Pv$ ad Gv P ut L ad Gv;

De Motu Corporum

Gv; & GvP ad Qv *quad.* ut PCq. ad CDq; & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QTq. ut EPq. ad PFq, id est ut CAq, ad PFq, sive (per Lem. XII.) ut CDq, ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq. ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ seu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CB$ *quad.* sive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$. & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1



& 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem

Idem aliter.

Inveniatur vis quæ tendit ab Hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc distantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per Corol. 3 Prop. VII.) vis ad umbilicum *S* tendens erit ut $\frac{PE\,cub}{SPq}$, hoc est, ob datam *PE*, reciproce ut *SPq*. *Q.E.I.*

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

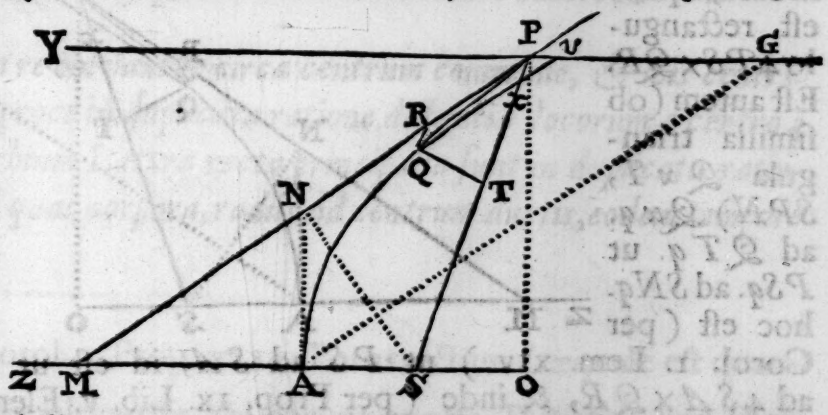
LEMMA XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *AQP* Parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN*, linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN*, & ob æquales *MS* & *SP*, *MN* & *NP*, *MA* & *AO*, parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*, & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A* & simile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: Ergo *PS* est ad *SN*, ut *SN* ad *SA*. *Q.E.D.*



Corol. 1. *PSq.* est ad *SNq.* ut *PS* ad *SA*.

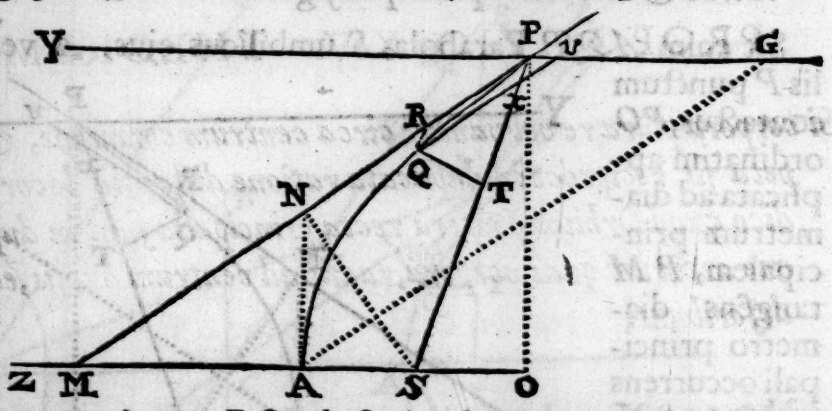
Corol. 2. Et ob datam *SA*, est *SNq.* ut *PS*.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum recta SN, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

PROPOSITIO. XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio Lemmatis, sitque P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco Q in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam & occurrentem tum diametro TPG in v, tum distantiæ SP in x. Jam ob similia triangula Pxv, SPM & æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px seu QR & Pv. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv, id est (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx per (per Corol. 2 Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in casu, æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QxT, SPN) Qx *q.* ad QT *q.* ut PS *q.* ad SN *q.* hoc est (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id est ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) QT *q.* & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,q.}{QR}$, & fiet $\frac{SP\,q. \times QT\,q.}{QR}$ æquale $SP\,q. \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $SP\,q. \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$, reciproce in duplicata ratione distantiæ SP. *Q. E. I.*



Corol.

Corol. 1. Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P, ſecundum lineam quamvis rectam PK, quacunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo ſe mutuo tangentes, eadem vi centripeta deſcribi non poſſunt.

Corol. 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula deſcribi poſſit, & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium QR: movebitur hoc corpus in Conica aliqua ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipſin, & caſum excipio ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciproce in duplicata ratione diſtantiæ locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia ſunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

Nam, per Corol. 2. Prop. XIII, Latus rectum L æquale eſt quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per Hypotheſin) reciproce ut $SPq.$ Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ eſt ut $QTq. \times SPq.$ hoc eſt, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. Q. E. D.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. Hinc Ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$ ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod Tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata majorum axium.

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

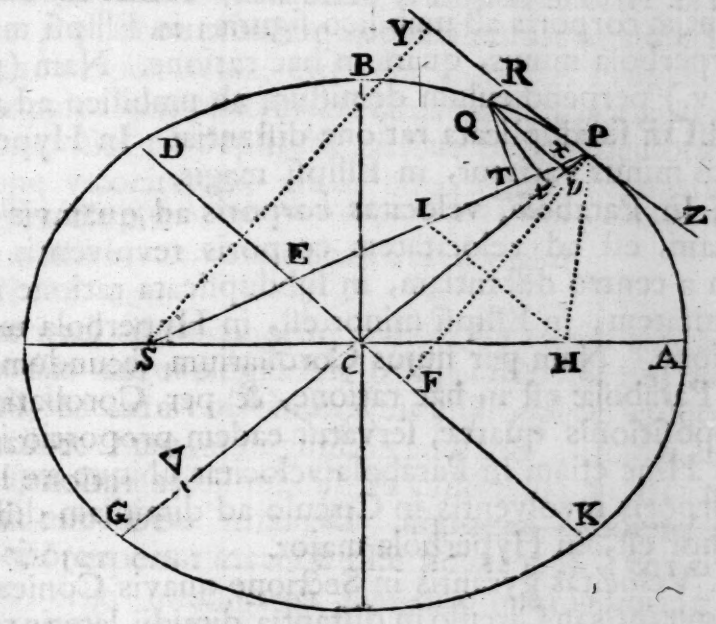
PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant Orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum ST & velocitas corporis P erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{STq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens PR, id est (ob proportionales PR ad QT & SP ad ST) ut $\frac{SP \times QT}{ST}$, sive ut ST reciproce & $SP \times QT$ directe; estque

$SP \times QT$

$SP \times QT$ ut area dato tempore deſcripta, id eſt, per Prop. XIV. in ſubduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.*



Corol. 1. Latera recta principalia ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum inverſe & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica ſectione, in maxima vel minima ab umbilico diſtantia, eſt ad velocitatem in Circulo in eadem à centro diſtantia, in ſubduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. Corporum in Ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem quæ corporum gyrantium in Circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per Corol 6. Prop. IV.) reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores; & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum ſubduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſe.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera

De Motu Corporum

latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in subduplicata ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipsi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in subduplicata ratione distantiæ. In Hyperbola perpendiculum minus variatur, in Ellipsi magis.

Corol. 7. In Parabola, velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam, est ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro distantiam, in subduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Propositionis quartæ, servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in Circulo in distantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc Circulo sit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in subduplicata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

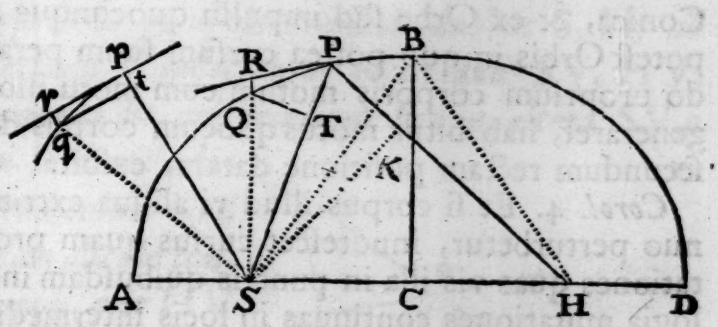
PROPOSITIO XVII. PROBLEMA. IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur Linea quam corpus describit, de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit qua corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*.

De

De loco P, ſecundum lineam PR, exeat corpus P, cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coniſectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua pr Orbitam pq in p, & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale Coniſectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit iſtud L. Datur præterea Coniſectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH, & dabitur poſitione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, & erit $SPq. - 2KPH + PHq. = SHq. = 4CHq. = 4BHq - 4BCq. = \overline{SP+PH}$: *quad.* $- L \times \overline{SP+PH} = SPq. + 2SPH + PHq. - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$, ad PH, ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS, adeoque figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta ſit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. *Q. E. I.*



Corol. 1. Hinc in omni Coniſectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH, ad DS ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad $\frac{1}{2}PH$ ut $2SP + 2KP$ ad L,

De Motu Corporum

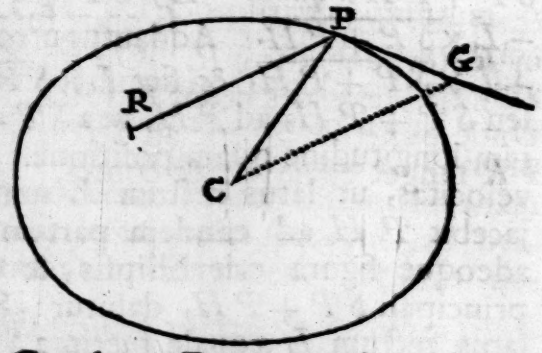
in casu hujus Corollarii, fit $\mathcal{D}S + \mathcal{D}H$ ad $\mathcal{D}H$ ut $4\mathcal{D}S$ ad L, & divisim $\mathcal{D}S$ ad $\mathcal{D}H$ ut $4\mathcal{D}S - L$ ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali $\mathcal{D}$, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam $\mathcal{D}S$, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad distantiam $\mathcal{D}S$, gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein $\mathcal{D}H$ ad $\mathcal{D}S$ ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\mathcal{D}S$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest Orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque Sectionis conicæ cujus centrum sit C, & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & Orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per Corol. 1 & Schol. Prop. X, & Corol. 3 Prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$.

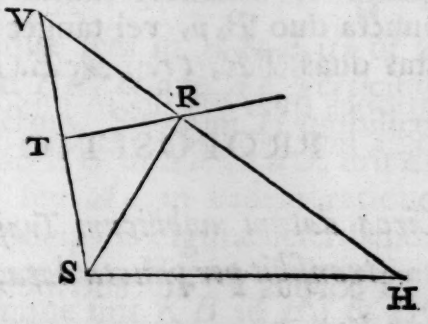
SECTIO

SECTIO IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab Ellipſeos vel Hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem Conicam alicubi tanget: & contra, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*



Secet enim perpendiculum TR rectam HV productam, ſi opus fuerit, in R; & jungatur SR. Ob æquales TS, TV, æquales erunt & rectæ SR, VR & anguli TRS, TRV. Unde punctum R erit ad Sectionem Conicam, & perpendiculum TR tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

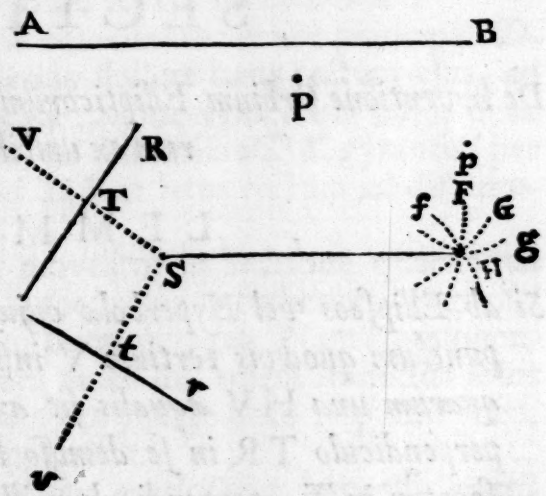
PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis Trajectoriæ cujuſvis; P punctum per quod Trajectoria debet tranſire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB - SP$, ſi orbita ſit Ellipſis, vel $AB + SP$, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut ſit TV æqualis ST; centroque V & intervallo AB deſcribatur circulus FH. Hac

De Motu Corporum

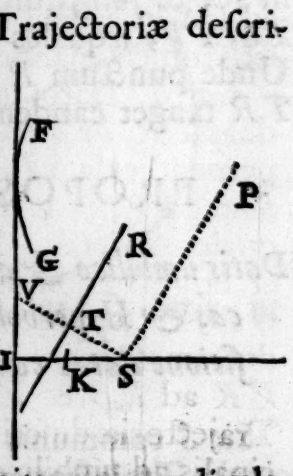
methodo ſive dentur duo puncta P, p, ſive duæ tangentes TR, tr, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria deſcripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipſi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per Lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. *Q. E. F.*



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens Trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS deſcribe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut ſit TV æqualis ST. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus fg, ſi datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, ſi datur altera tangens tr; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg ſi dantur duo puncta P, p, vel tranſeat per duo puncta V, v, ſi dantur duæ tangentes TR, tr, vel tangat circulum FG & tranſeat per punctum V, ſi datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biſeca in K; & axe SK, vertice principali K deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, tranſibit per punctum P; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR, tanget rectam TR. *Q. E. F.*

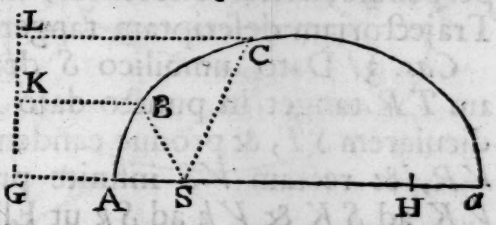


PRO-

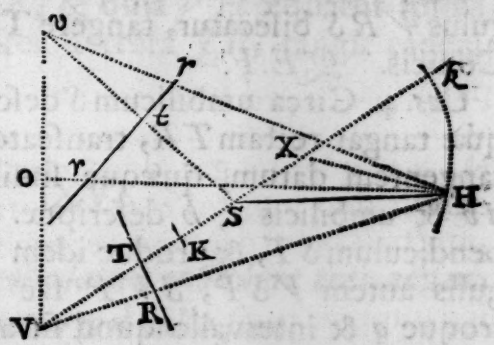
PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Cas. 1. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *SA* ad *AG* & *Sa* ad *aG*, ut eſt *SB* ad *BK*, & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter Figuræ deſcriptæ, & cum ſit *SA* ad *AG* ut *Sa* ad *aG*, erit diviſim *Sa*−*SA* ſeu *SH* ad *aG*−*AG* ſeu *Aa* in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumque ſint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifeſtum eſt.



Cas. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv* æquales *TS*, *tS*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k* ita, ut ſit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *Kk* deſcribatur circulus ſecans *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe principali ipſam *VH* æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *Kk* in *X*, & junge *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Quoniam eſt *VK* ad *KS* ut *Vk* ad *kS*; & compoſite ut *VK*+*Vk* ad *KS*+*kS*; diviſimque

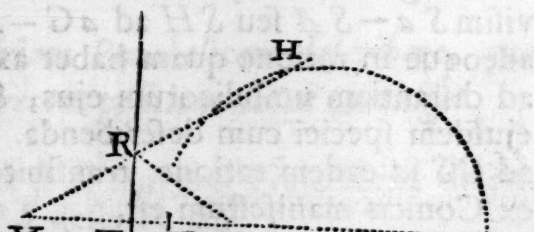


ut

De Motu Corporum

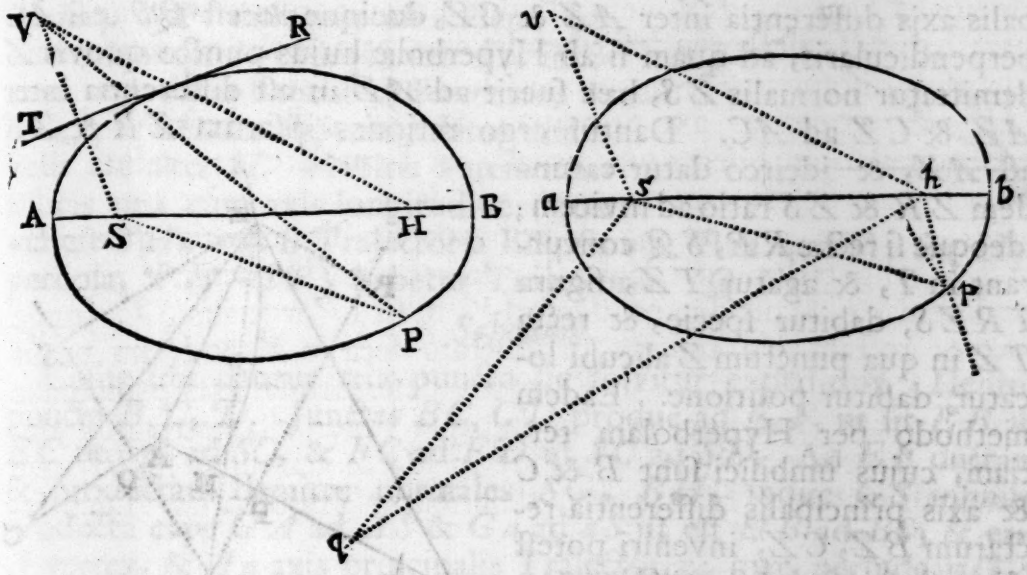
ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, adeoque ut VX ad HX & HX ad SX, similia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, adeoque ut VK ad KS. Habet igitur Trajectoriæ descriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH, quam habet Trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit Trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut sit TV æqualis ST. Junge VR, & rectam VS infinite productam seca in K & k, ita ut sit VK ad SK & Vk ad Sk ut Ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro Kk descripto, secetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namque VH esse ad SH ut VK ad SK, atque adeo ut axis principalis Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda; rectam vero TR qua angulus VRS bisecatur, tangere Trajectoriam in puncto R, patet ex Conicis. *Q. E. F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit Trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit Figuræ apb, axe principali ab & umbilicis s, h descriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut sit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum secantem Figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ sit ad sh ut est SP ad sp, quæque angulum PSH angulo psh & angulum VSH angulo psq æquales constituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB distantiam VH æquante, describatur sectio Conica. Dico factum. Nam si agatur sv quæ sit ad sp ut est sh ad

ad *sq*, quæque conſtituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt ſimilia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut eſt *sh* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula



VSP, *hsq*) ut eſt *VS* ad *SP* ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro ob ſimilia triangula *VSH*. *vsh*, eſt *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id eſt, axis Conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea Figura jam deſcripta ſimilis eſt Figuræ *apb*. Tranſit autem hæc Figura per punctum *P*, eo quod triangulum *PSH* ſimile ſit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipſius axi & *VS* biſecatur perpendiculariter a recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

LEMMA XVI.

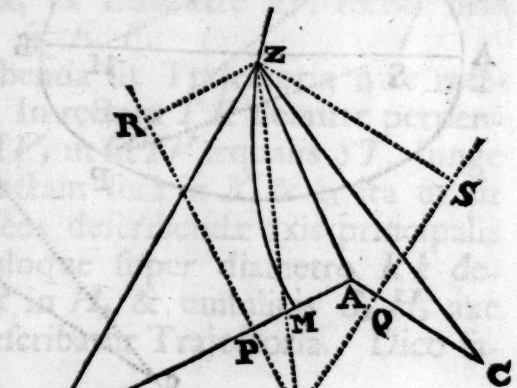
A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; Ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici ſunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM*.

ad

De Motu Corporum

ad MA ut est MN ad AB, & erecta PR perpendiculari ad AB, demissaque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex natura hujus Hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN ad AB. Simili discursu punctum Z locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ, ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ, & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque si rectæ RP, SQ concurrant in T, & agatur TZ, figura $TRZS$, dabitur specie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt B & C & axis principalis differentia rectarum BZ, CZ, inveniri potest alia recta in qua pũctum Z locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quæsitum Z in eorum intersectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ æquantur, punctum Z locabitur in perpendiculo bisecante distantiam AB, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro Circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

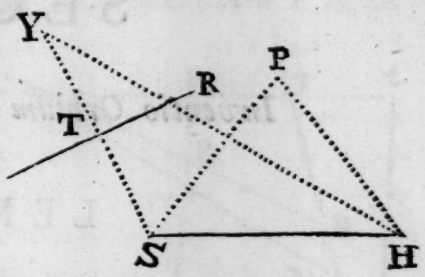
Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

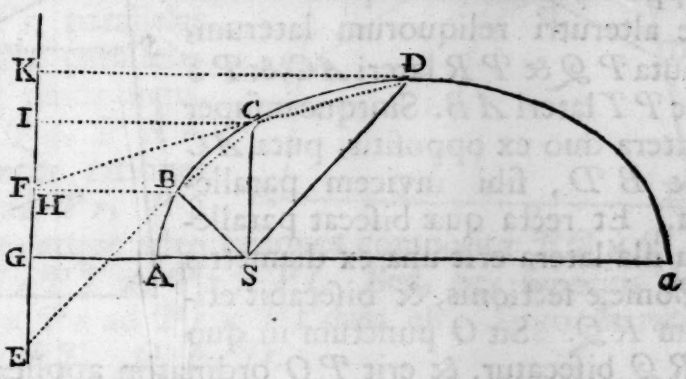
Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus sit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Υ, ut sit $T\Upsilon$ æqualis ST, & erit ΥH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes

tes TR, vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem TH, vel PH, a dictis punctis T vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iiſdem, atque adeo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt TH; vel, ſi Trajectoria Ellipſis eſt, $PH + SP$; ſin Hyperbola, $PH - SP$) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut ſit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinite producta cape GA ad AS & Ga ad aS ut eſt HB ad BS; & erit A vertex, & Aa axis principalis Trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam ſi demittantur ad GF perpendicula CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc eſt, ut SC ad SB; & viciſſim IC ad SC ut HB ad SB ſive ut GA ad SA. Et ſimili argumento probabitur eſſe KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in Coniſectione circa umbilicum S ita deſcripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad ſingula Sectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam GF demiſſa in data illa ratione.



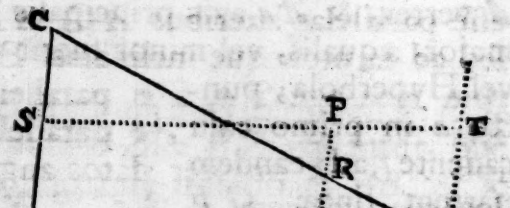
Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit Clariſſimus Geometra *de la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. VIII. Prop. XXV.

SECTIO V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

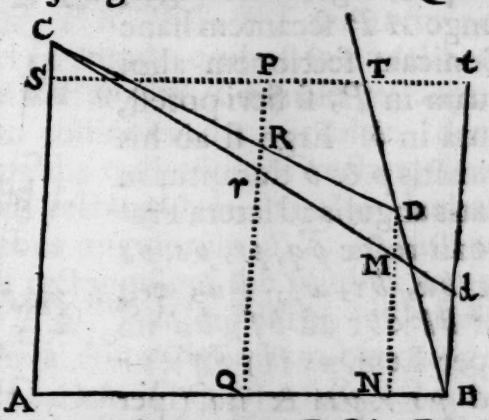
Si a datæ Conicæ Sectionis puncto quovis P, *ad Trapezii alicujus* ABDC, *in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS×PT *in data ratione.*



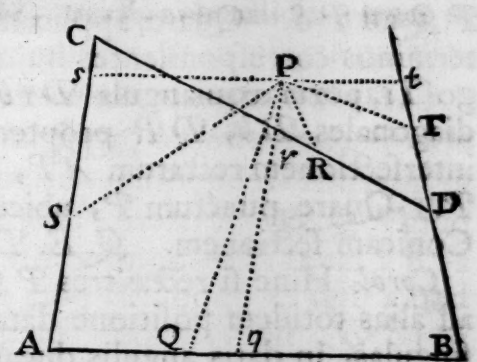
Cas. 1. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta *AC* & *BD*, sibi invicem parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis, & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K* ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* sint ad Conicam sectionem, & *PK* secet *AB* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III Conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ*×*PR* æqualia sunt; atque adeo rectangulum *PQ*×*PR* est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum *PS*×*PT* in data ratione. *Q.E.D.*

Cas.

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera oppoſita AC & BD non eſſe parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t, tum Conicæ ſectioni in d. Junge Cd ſecantem PQ in r, & ipſi PQ parallelam age DM ſecantem Cd in M & AB in N. Jam ob ſimilia triangula BTt, DBN, eſt Bt ſeu PQ ad Tt ut DN ad NB. Sic & Rr eſt ad AQ ſeu PS ut DM ad AN. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum PQ in Rr eſt ad rectangulum PS in Tt, ita rectangulum NDM eſt ad rectangulum ANB, & (per Caſ. 1) ita rectangulum PQ in Pr eſt ad rectangulum PS in Pt, ac diviſim ita rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*



Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT non eſſe parallelas lateribus AC, AB, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age Pq, Pr parallelas ipſi AC; & Ps, Pt parallelas ipſi AB; & propter datos angulos triangulorum PQq, PRr, PSs, PTt, dabuntur rationes PQ ad Pq, PR ad Pr, PS ad Ps, & PT ad Pt; atque adeo rationes compoſitæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data eſt: Ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*

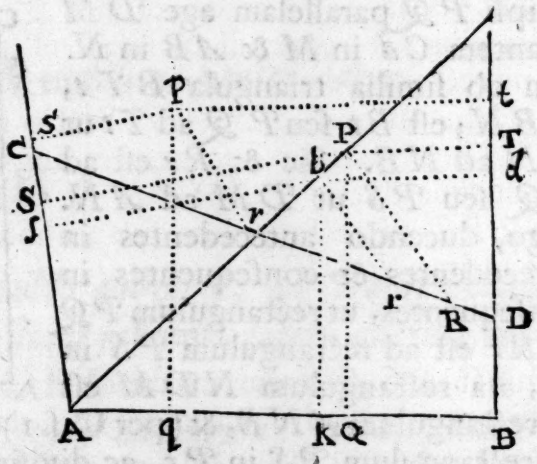


LEMMA XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera Trapezii PQ × PR *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS × PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam ſectionem circa Trapezium deſcriptam.*

De Motu Corporum

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, puta p, concipe Conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in P, si fieri potest, puta in b. Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ pq, pr, ps, pt & bk, br, bf, bd; erit ut $bk \times br$ ad $bf \times bd$ ita (per Lem. XVII) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per Hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem Trapeziorum $bkAf$, $PQAS$, ut bk ad bf ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit br ad bd ut PR ad PT. Ergo Trapezia æquiangula $Drbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales Db, DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP, DP adeoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc si rectæ tres PQ, PR, PS a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS *quad.* in data ratione: punctum P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea BD cum linea AC manente positione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam linea PT cum linea PS: & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS *quad.* rectæque AB, CD quæ curvam in punctis A & B, C & D secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

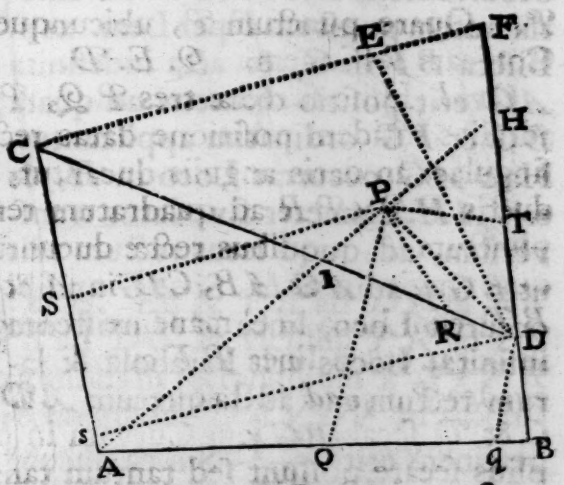
Scholium.

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam Rectilinea per verticem Coni transiens, quam Circularis basi parallela includatur. Nam si punctum p incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor A, B, C, D junguntur, Conica sectio verte-

vertetur in geminas Rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum p incidit, & altera eſt recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo ſub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis & rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ ſit ad rectangulum ſub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum ſub ſinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum Q, R, in quibus duæ primæ PQ, PR ducuntur. Cæteris in caſibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii $ABCD$ ſubſtitui poteſt Quadrilaterum cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor A, B, C, D poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu Sectio Conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

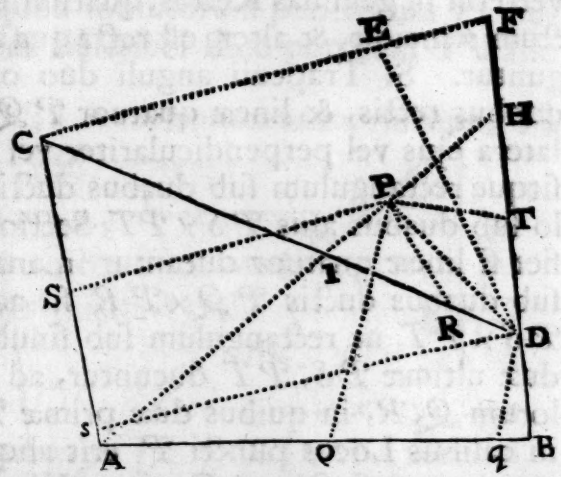
LEMMA XIX.

Invenire punctũ P, *a quo ſi rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem poſitione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas in datis angulis ducantur, rectangulũ ſub duabus ductis,* PQ × PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus,* PS × PT, *in data ratione.*



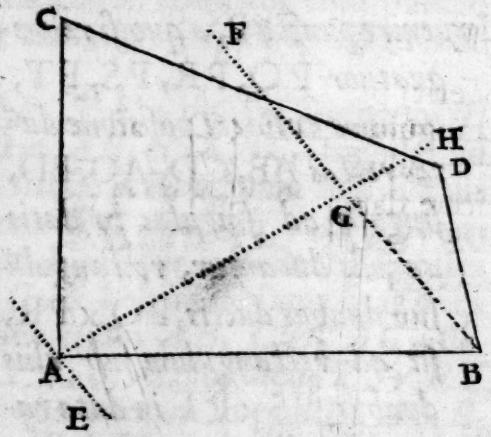
Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH, in qua velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppoſitas BD, CD, nimirum BD in H & CD in I, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA ad

ad PS, adeoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc a data ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio PR ad PT, & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH dabitur ratio PI ad PH atque adeo punctum P. *Q. E. I.*



Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum P punctum quodvis D tangens duci poteſt. Nam chorda PD ubi puncta P ac D conveniunt, hoc eſt, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium IP & PH invenietur ut ſupra. Ipſi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in ea ultima ratione ſectam in E, & DE tangens erit, propterea quod CF & evaneſcens IH parallelæ ſunt, & in E & P ſimiliter ſectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri poteſt. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc Loci tangentem AE & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem Loco in F. Invenietur autem punctum F per Lem. XIX. Biſeca BF in G, & acta indefinita AG erit poſitio diametri ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat Loco in H, & erit AH diameter ſive latus tranſverſum, ad quod latus rectum erit ut $BGq.$ ad AGH. Si AG nullibi occurrit Loco, linea AH exiſtente infinita, Locus erit Parabola & larum rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta A & H ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius G: & Ellipſis, ubi G intermedium eſt, niſi forte angulus AGB rectus ſit & inſuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in caſu Circulus habebitur.



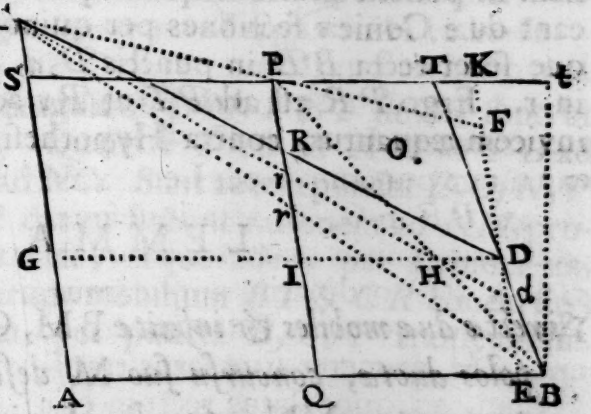
Atque ita Problematis Veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, ſed compoſitio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

LEM-

LEMMA XX.

Si Parallelogrammum quodvis A S P Q *angulis duobus oppositis* A & P *tangit sectionem quamvis Conicam in punctis* A & P; *& lateribus unius angulorum illorum infinite productis* A Q, A S, *occurrit eidem sectioni Conicæ in* B & C; *a punctis autem occursuum* B & C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* B D, C D *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* P S, P Q *in* T & R: *erunt semper abscissæ laterum partes* P R & P T *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*

Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & a puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum *DE*×*DF* ad rectangulum *DG*×*DH* in ratione data. Sed est *PQ* ad *DE* (seu *IQ*) ut *PB* ad *HB*, adeoque ut *PT* ad *DH*; & vicissim *PQ* ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Est & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, adeoque ut (*IG* vel) *PS* ad *DG*, & vicissim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus fit rectangulum *PQ*×*PR* ad rectangulum *PS*×*PT* ut rectangulum *DE*×*DF* ad rectangulum *DG*×*DH*, atque adeo in data ratione. Sed dantur *PQ* & *PS* & propterea ratio *PR* ad *PT* datur. *Q.E.D.*

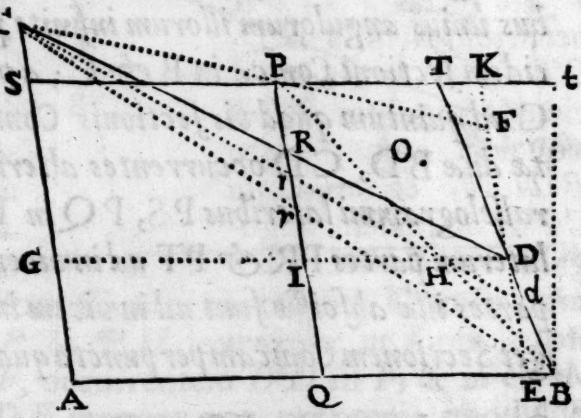


Cas. 2. Quod si *PR* & *PT* ponantur in data ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum *DE*×*DF* ad rectangulum *DG*×*DH* in ratione data, adeoque punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta *A*, *B*, *C*, *P*. *Q.E.D.*

Corol.

Corol. 1. Hinc si agatur *BC* secans *PQ* in *r*, & in *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr* quam habet *PT* ad *PR*: erit *Bt* tangens Conicæ sectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evanescente, *BT* tangens evadat; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.

Corol. 2. Et vice versa si *Bt* sit tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD*; erit *PR* ad *PT* ut ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, si sit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*: convenient *BD*, *CD* ad Conicæ Sectionis puncum aliquod *D*.



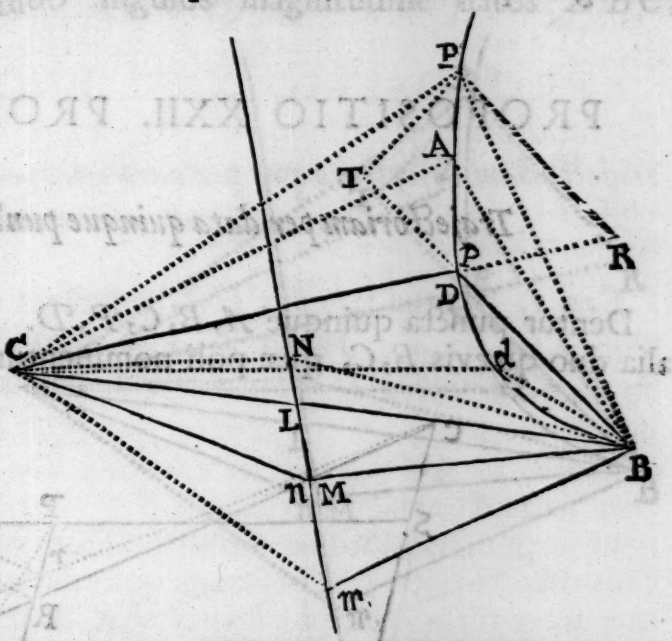
Corol. 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinque puncta *A*, *B*, *C*, *P*, *O*; easque secet recta *BD* in punctis *D*, *d*, & ipsam *PQ* secet recta *Cd* in r. Ergo *PR* est ad *PT* ut *Pr* ad *PT*; unde *PR* & *Pr* sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C, *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur*; *dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem Conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant Sectionem Conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam

Nam in recta MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N, incidat punctum mobile $\mathcal{D}$ in immotum $\mathcal{P}$. Junge $CN, BN, C\mathcal{P}, B\mathcal{P}$, & a puncto $\mathcal{P}$ age rectas $\mathcal{P}T, PR$ occurrentes ipsis $B\mathcal{D}, C\mathcal{D}$ in T & R, & facientes angulum $B\mathcal{P}T$ æqualem angulo dato BNM, & angulum $C\mathcal{P}R$ æqualem angulo dato CNM. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli $M\mathcal{B}\mathcal{D}, N\mathcal{B}\mathcal{P}$, ut & anguli $M\mathcal{C}\mathcal{D}, N\mathcal{C}\mathcal{P}$; aufer communes $N\mathcal{B}\mathcal{D}$ & $N\mathcal{C}\mathcal{D}$, & restabunt æquales NBM & $\mathcal{P}BT$, NCM & $\mathcal{P}CR$: adeoque triangula $NBM, \mathcal{P}BT$ similia sunt, ut & triangula $NCM, \mathcal{P}CR$. Quare $\mathcal{P}T$ est ad NM ut $\mathcal{P}B$ ad NB, & $\mathcal{P}R$ ad NM ut $\mathcal{P}C$ ad NC. Sunt autem puncta $B, C, N, \mathcal{P}$ immobilia. Ergo $\mathcal{P}T$ & $\mathcal{P}R$ datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter se; atque adeo, per Lemma xx, punctum $\mathcal{D}$ (perpetuus rectarum mobilium BT & CR concursus) contingit sectionem Conicam, per puncta $B, C, \mathcal{P}$ transeuntem. *Q. E. D.*



Et contra, si punctum mobile $\mathcal{D}$ contingat sectionem Conicam transeuntem per data puncta B, C, A, & sit angulus $\mathcal{D}BM$ semper æqualis angulo dato ABC, & angulus $\mathcal{D}CM$ semper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum $\mathcal{D}$ incidit successive in duo quævis sectionis puncta immobilia $p, \mathcal{P}$, punctum mobile M incidat successive in puncta duo immobilia n, N: per eadem n, N agatur Recta nN, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, si fieri potest, versetur punctum M in linea aliqua Curva. Tanget ergo punctum $\mathcal{D}$ sectionem Conicam per puncta quinque $B, C, A, p, \mathcal{P}$, transeuntem, ubi punctum M perpetuo tangit lineam Curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum $\mathcal{D}$ sectionem Conicam per eadem quinque puncta $B, C, A, p, \mathcal{P}$ transeuntem, ubi punctum

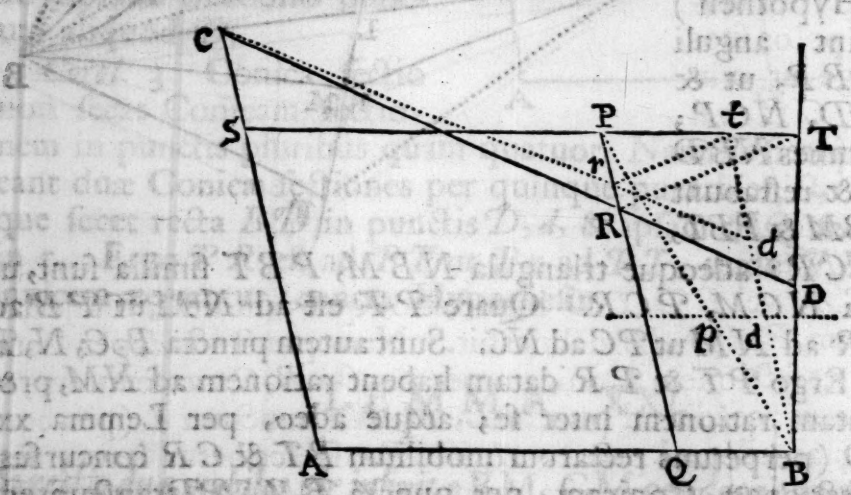
De Motu Corporum

ctum *M* perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. xx. Igitur punctum *M* versari in linea Curva absurdum est. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC*,

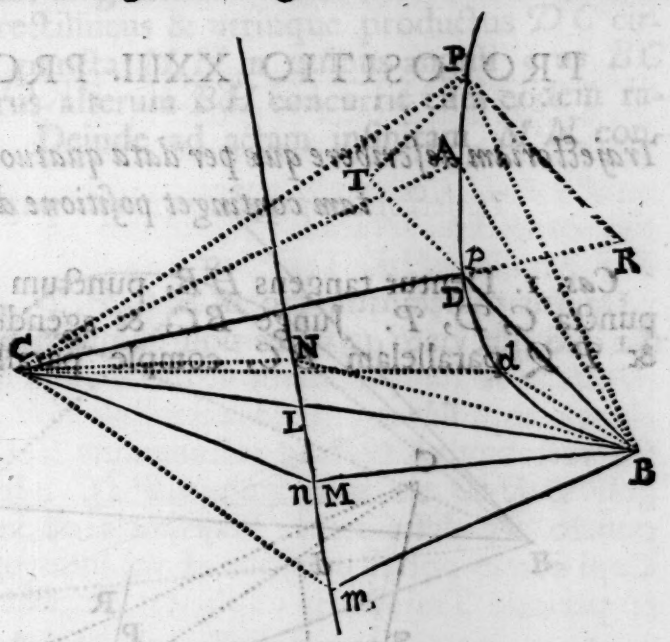


hisque parallelas *TPS*, *PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT*, *CRD*, novissime ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT*, *PR*, acta recta *tr* ipsi *TR* parallela, abscinde quasvis *Pt*, *Pr* ipsis *PT*, *PR* proportionales; & si per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæsita. Nam punctum illud *d* (per Lemma xx) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* transeunte; &, lineis *Rr*, *Tt* evanescentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Transit ergo sectio Conica per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. D.*

Idem

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; &, circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* caſu utroque ſe decuſſant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* interſectio quæ jam ſit *m* incidat ſemper in rectam illam infinitam *MN* & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* interſectio, quæ jam ſit *d*, Trajectoriam quæſitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d*, per Lem. XXI, continget ſectionem Conicam per puncta *B*, *C* tranſeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Deſcribetur itaque ſectio Conica tranſiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q.E.F.*



Corol. 1. Hinc recta expedite duci poteſt quæ Trajectoriam quæſitam, in puncto quovis dato *B*, continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæſita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri poſſunt, ut in Corollario ſecundo Lemmatis XIX.

Scholium.

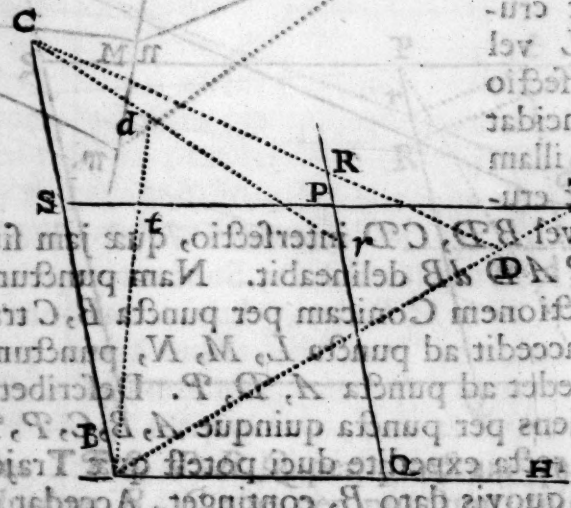
Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo *BP*, & in ea, ſi opus eſt, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut eſt *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *pd* ipſi *SPT* parallelam, inque ea capiendo ſemper *pd* æqualem *Pr*; & agendo rectas *Bd*, *Cr* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *Pr* ad *Pt*, *PR* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *pd* ad *Pt* in eadem ratione; erunt *pd* & *Pr* ſemper æqua-

les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in constructione secunda, describere Mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens HB, punctum contactus B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam BH, & PQ parallelam BC, comple parallelogrammum $BSPQ$.

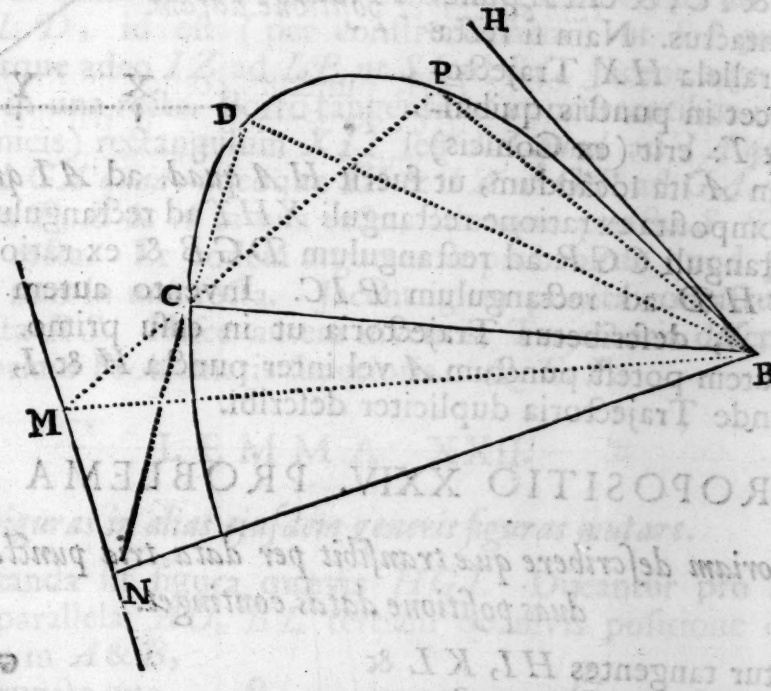


Ago BD secantem SP in T, & CD secantem PQ in R. Denique, agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ, PS abscinde Pr, Pt ipsis PR, PT proportionales respective; & actarum Cr, Bt concursus d (per Lem. xx) incidet semper in Trajectoriam describendam.

Idem

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus $\mathcal{D}C$ circa polum C. Notentur puncta M, N in quibus anguli crus BC secat radium illum ubi crus alterum BH concurrit cum eodem radio in punctis $\mathcal{P}$ & $\mathcal{D}$. Deinde ad actam infinitam MN con-

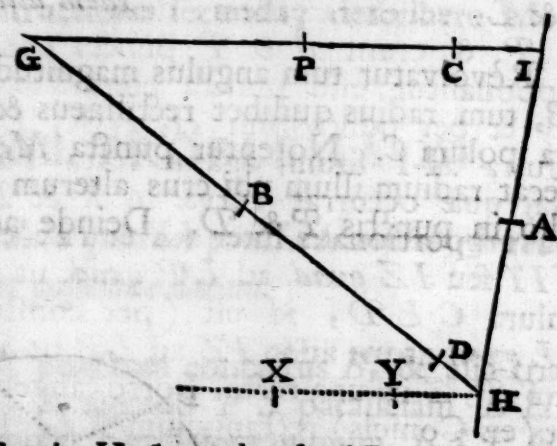


currant perpetuo radius ille $C\mathcal{P}$ vel $C\mathcal{D}$ & anguli crus BC, & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH, atque adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem Conicam per puncta $C, \mathcal{D}, \mathcal{P}$ transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor $B, C, \mathcal{D}, \mathcal{P}$ extra tangentem HI sita. Junge bina lineis $B\mathcal{D}$, $C\mathcal{P}$ concurrentibus in G, tangentique

tique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut sit *HA* ad *AI*, ut est rectangulum sub media proportionali inter *CG* & *GP* & media proportionali inter *BH* & *HD*, ad rectangulum sub media proportionali inter *DG* & *GB* & media proportionali inter *PI* & *IC*; & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ *PI* parallela *HX* Trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis)

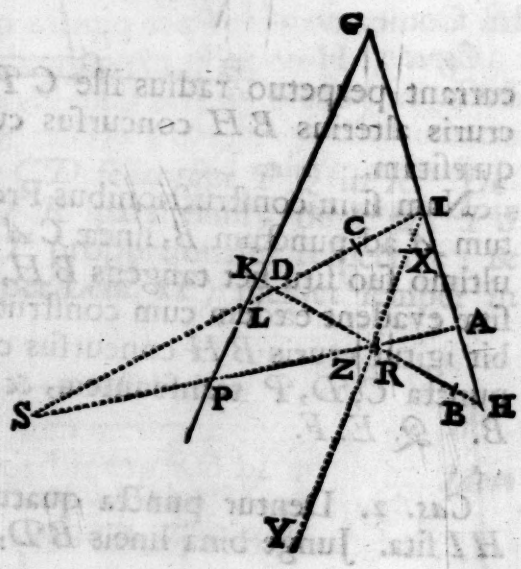


punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione composita ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD* seu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB* & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, describetur Trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.* Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL*



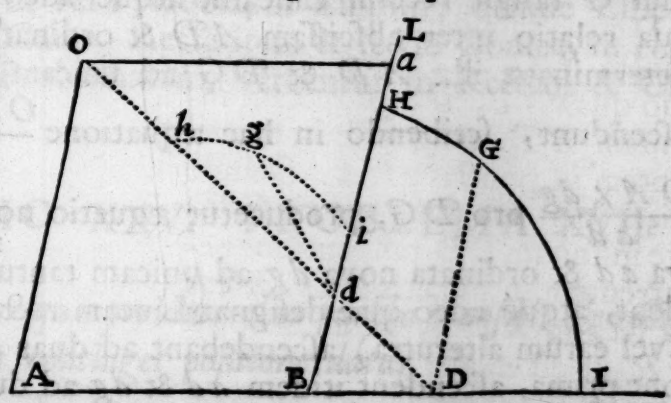
&

& *L D*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem: dein age *R S* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *H I* situm, agatur recta *I Υ* tangenti alteri *K L* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Υ*, & in ea sumatur *I Z* media proportionalis inter *I X* & *I Υ*: erit, ex Conicis, rectangulum *X I Υ* seu *I Z quad.* ad *L P quad.* ut rectangulum *C I D* ad rectangulum *C L D*, id est (per constructionem) ut *S I quad.* ad *S L quad:* atque adeo *I Z* ad *L P* ut *S I* ad *S L*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *X I Υ* seu *I Z quad.* ad *I A quad.* ut *G P quad* ad *G A quad:* adeoque *I Z* & *I A* ut *G P* ad *G A*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in una recta, adeoque puncta *S*, *P* & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in recta *R S*. Hisce autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. *Q. E. F.*

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis *H G I*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *A O*, *B L* tertiam quamvis positione datam *A B* secantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *A B* ducatur quævis *G D*, ipsi *O A* parallela. Deinde a puncto aliquo *O*, in linea *O A* dato, ad punctum *D* ducatur recta *O D*, ipsi *B L* occurrens in *d*, & a puncto occursus erigatur recta *d g* datum quemvis angulum cum recta *B L* continens, atque eam habens rationem ad *O d* quam habet *D G* ad *O D*; & erit *g* punctum in figura nova *h g i* puncto *G* respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figura novæ.

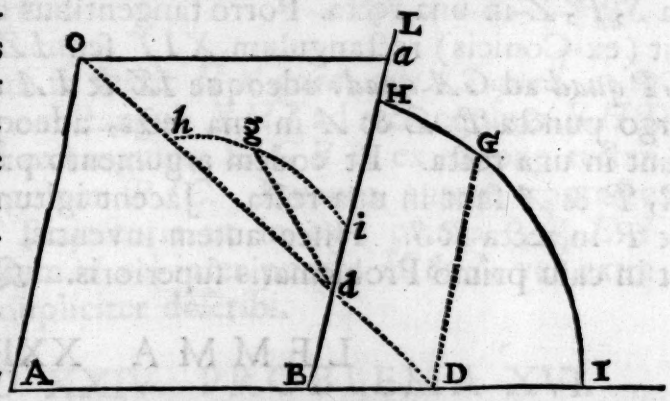


Concipe

De Motu Corporum

Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abscissam primam, ad abscissam novam; O polum, OD radium abscidentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (qno parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, si punctum G tangit rectam Lineam positione datam, punctum g tanget etiam Lineam rectam positione datam. Si punctum G tangit Conicam sectionem, punctum g tanget etiam Conicam sectionem. Conicis sectionibus hic Circulum annumero. Porro si punctum G tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum g tanget Lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut est ad ad OA ita sunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; adeoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum G tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque adeo quæ designat Lineam rectam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem ad & dg ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione secunda & AD, DG in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea Lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.



Dico

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam transiata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum a quibus conflatur intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsita.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ sectiones Conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si Hyperbola sit vel Parabola, in Ellipsin: deinde Ellipsis facile mutatur in Circulum. Recta item & sectio Conica, in constructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

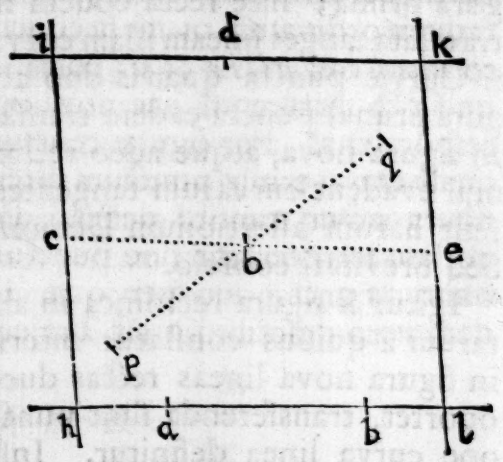
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In

De Motu Corporum

hac figura tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica ſectio in hac figura nova tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex Conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eadem ratione; & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd*, & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *ahb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per Probl. XIV, deſcribetur Trajectoria. *Q. E. F.* Ceterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

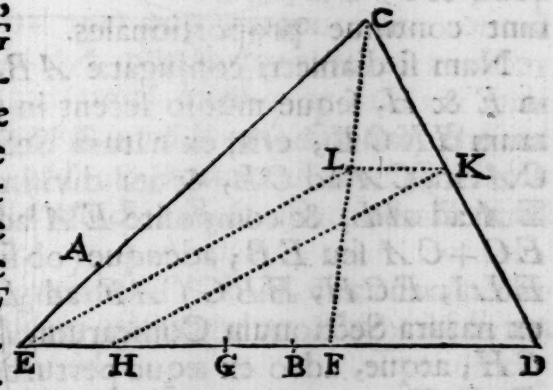
Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per punctum datum & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita,

ta, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & existente *Oq* æquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q.E.F.*

LEMMA XXIII.

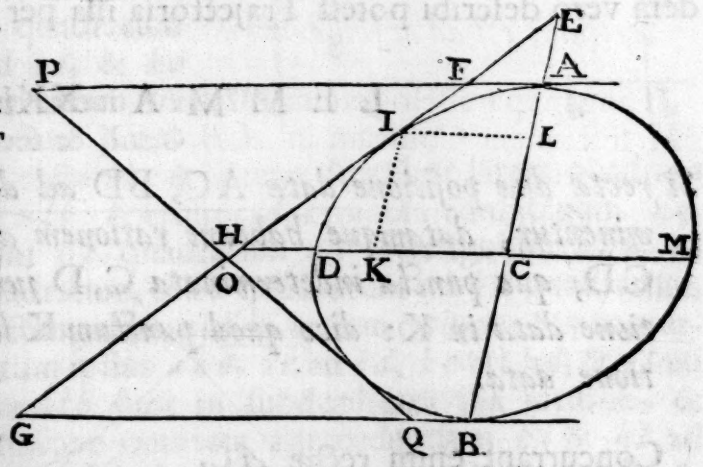
Si rectæ duæ positione datæ AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*



Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitque *FD* semper æqualis datæ *EG*; & erit ex constructione *EC* ad *GD*, hoc est, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, adeoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut sit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in recta *EL* positione data. Junge *LK*, & similia erunt triangula *CLK*, *CFD*; &, ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit semper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere positione dato *HK*. *Q.E.D.*

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque Coniſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod Sectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.



Sunto AF, GB parallelæ duæ Coniſectionem ADB tangentes in A & B; EF recta tertia Coniſectionem tangens in I, & occurrens prioribus tangentibus in F & G; ſitque CD ſemidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod AF, CD, BG ſunt continue proportionales.

Nam ſi diametri conjugatæ AB, DM tangenti FG occurrant in E & H, ſeque mutuo ſecent in C, & compleatur parallelogrammum $IKCL$; erit, ex natura Sectionum Conicarum, ut EC ad CA ita CA ad CL, & ita diviſim $EC-CA$ ad $CA-CL$, ſeu EA ad AL, & compoſite EA ad $EA+AL$ ſeu EL ut EC ad $EC+CA$ ſeu EB; adeoque (ob ſimilitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG) AF ad LI ut CH ad BG. Eſt itidem, ex natura Sectionum Conicarum, LI (ſeu CK) ad CD ut CD ad CH; atque, adeo ex æquo perturbate, AF ad CD ut CD ad BG. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis AF, BG occurrant in F & G, P & Q, ſeque mutuo ſecent in O; erit (ex æquo perturbate) AF ad BQ ut AP ad BG, & diviſim ut FP ad GQ, atque adeo ut FO ad OG.

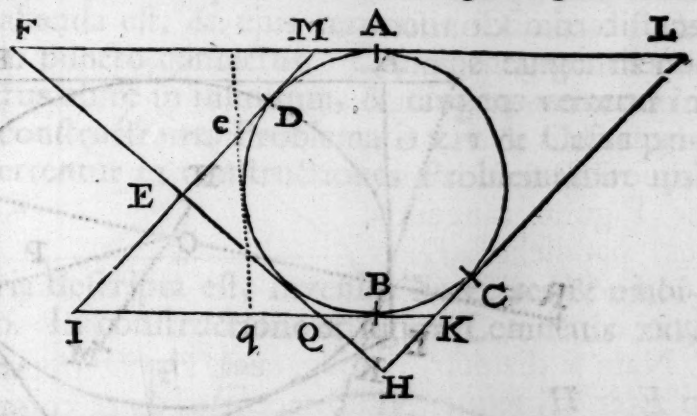
Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ PG, FQ per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum Figuræ & puncta contactuum A, B tranſeuntem.

LEM-

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum alteram.

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem Conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; sumantur autem laterum *MI*, *KI* abscissæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML* abscissæ *KH*, *MF*: dico quod sit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per Corollarium secundum Lemmatis superioris, est *ME* ad *EI* ut (*AM* seu) *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q.E.D.* Item *KH* ad *HL* ut (*BK* seu) *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q.E.D.*



Corol. 1. Hinc si datur parallelogramum *IKLM*, circa datam Sectionem Conicam descriptum, dabitur rectangulum *KQ*×*ME*, ut & huic æquale rectangulum *KH*×*MF*.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *q* & *e*; rectangulum *KQ*×*ME* æquabitur rectangulo *Kq*×*Me*; eritque *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & divisim ut *Qq* ad *Ee*.

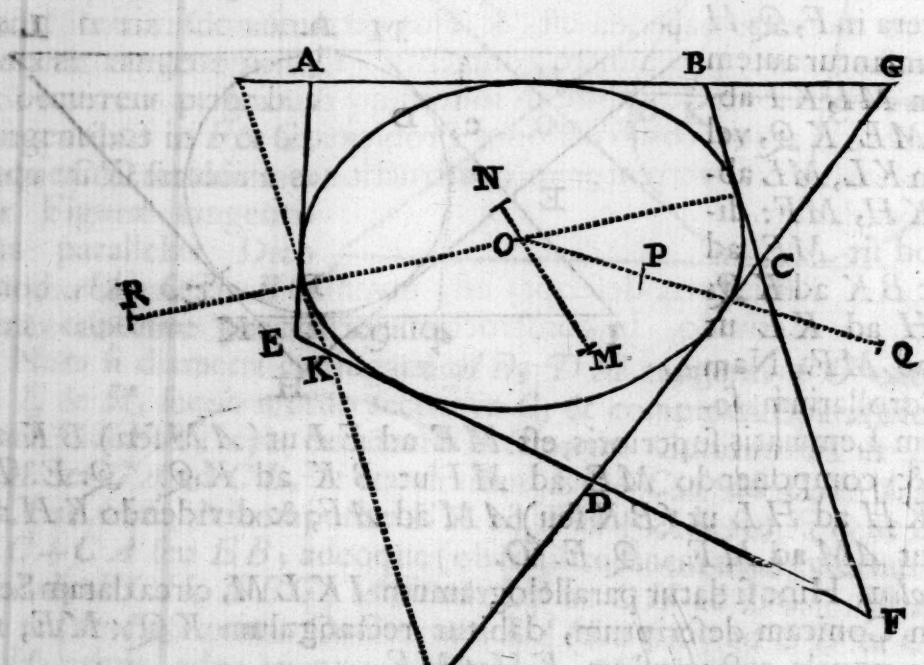
Corol. 3. Unde etiam si *Eq*, *eQ* jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, transibit eadem

De Motu Corporum dem recta per medium omnium Eq, $e\mathcal{Q}$, MK; (per Lem. xxiii) & medium rectæ MK est centrum Sectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG, BCF, $GC\mathcal{D}$, $F\mathcal{D}E$, EA. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales AF, BE biseca, & (per Corol. 3. Lem. xxv) recta MN per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursus Figuræ quadrilateræ $BG\mathcal{D}F$, sub aliis quibusvis quatuor



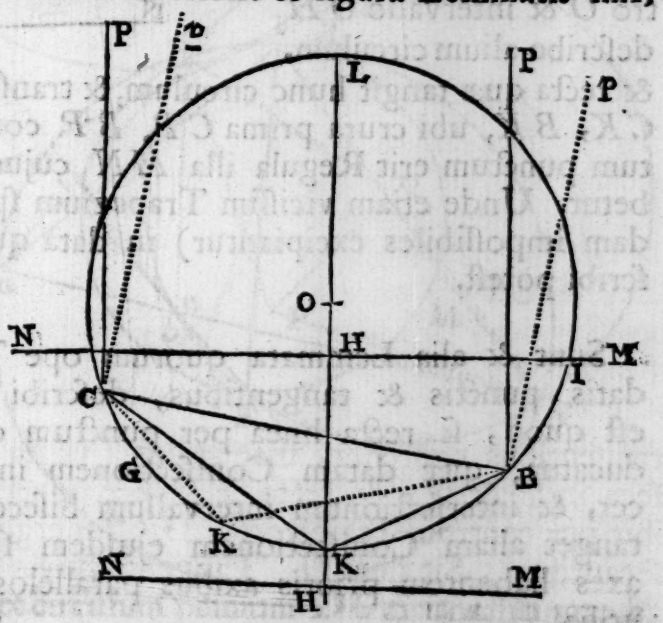
tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) $B\mathcal{D}$, GF biseca in $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$: & recta $P\mathcal{Q}$ per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud O. Tangenti cuivis BC parallelam age KL, ad eam distantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget Trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes

gentes alias quaſvis duas GCD, FDE in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concurſus C & K, F & L age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta ſecabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per 1. Probl. XIV. Trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.*

Scholium.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Aſymptoti, includuntnr in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cùm centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinite diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones Problematis XIV & Caſus primi Problematis XV vertentur in conſtructiones Problematum ubi Aſymptoti dantur.

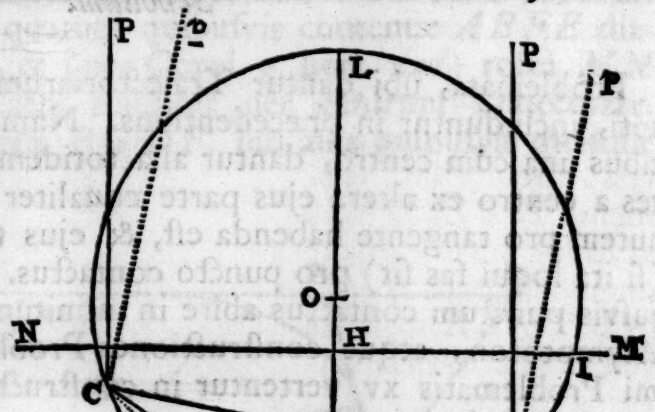
Poſtquam Trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In conſtructione & figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura BP, CP, quorum concurſu Trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, C in figura illa. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura CN, BN, concurſu ſuo K vel k, Circulum $IBKGC$. Sit Circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad Regulam MN, ad quam altera illa crura CN, BN interea concurrebant



dum

dum Trajectoria describebatur, demitte normalem OH Circulo occurrentem in K & L. Et ubi crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K quod Regulæ propius est, crura prima CP, BP parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles PCK, PBK; his autem datis describi potest Circulus $IBKGC$. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, adeoque ipsa OH. Centro O & intervallo OH describe alium circulum,



& recta quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum CK, BK, ubi crura prima CP, BP concurrunt ad quartum datum punctum erit Regula illa MN cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inscribi potest.

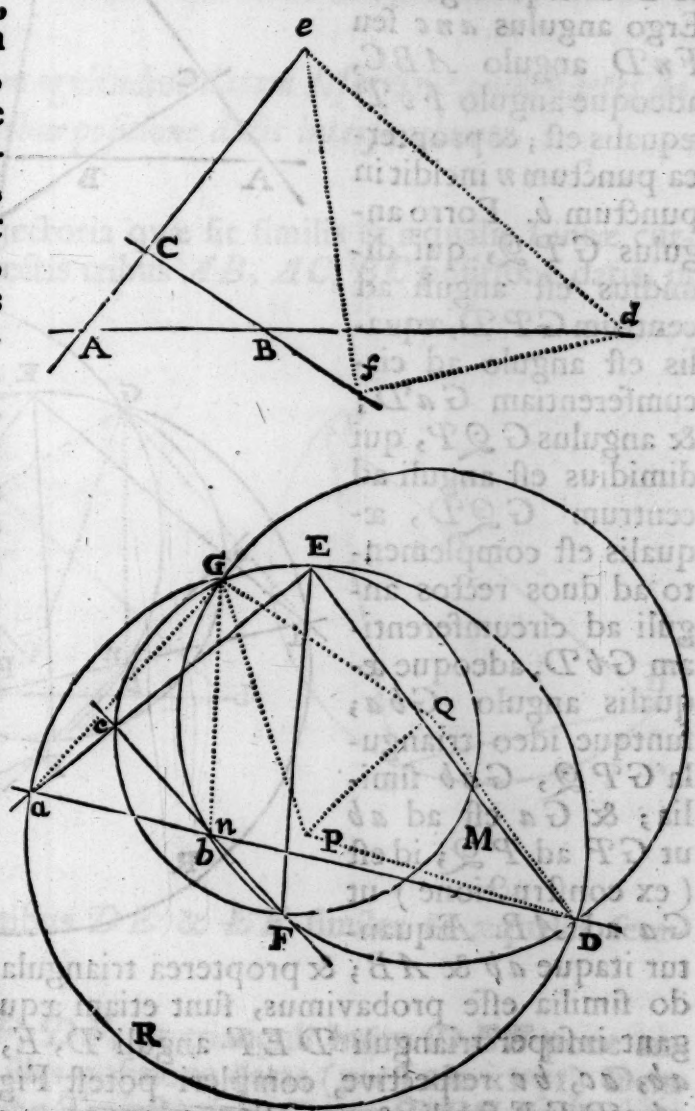
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEMMA

LEMMA XXVI.

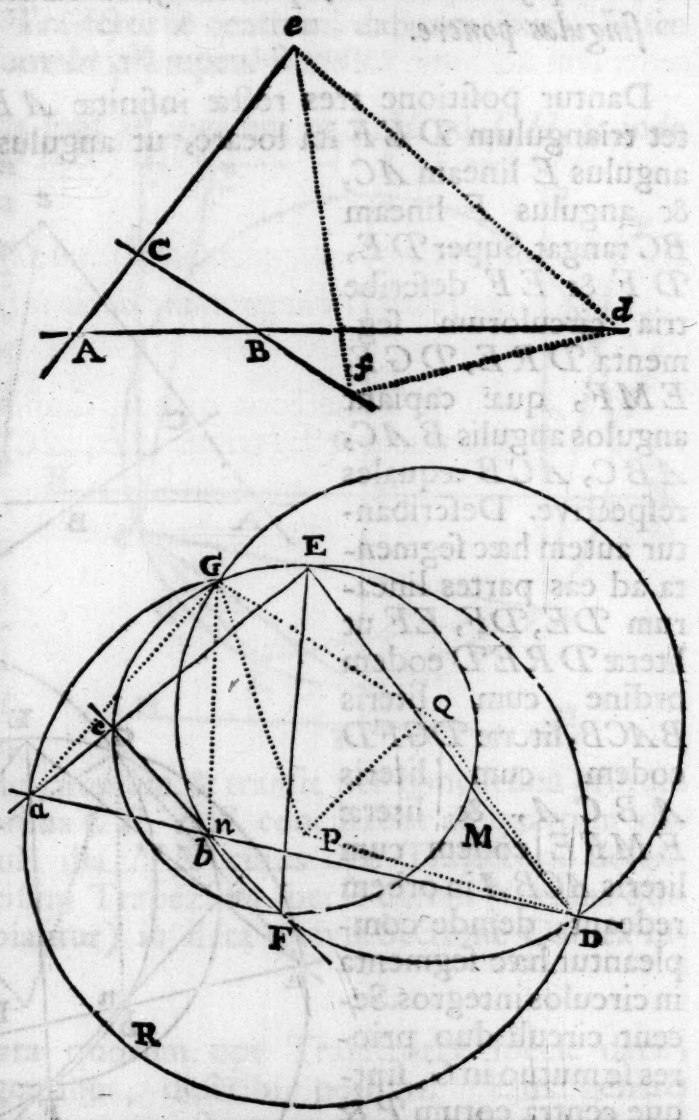
Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

Dantur poſitione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF deſcribe tria circulorum ſegmenta DRE, DGF, EMF, quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales reſpective. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum DE, DF, EF ut literæ $DRED$ eodem ordine cum literis $BACB$, literæ $DGFD$ eodem cum literis $ABCA$, & literæ $EMFE$ eodem cum literis $ACBA$ in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuo in G, ſintque centra eorum P & Q. Junctis GP, PQ, cape Ga ad AB ut eſt GP ad PQ, & centro G, intervallo Ga deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum DGE in a. Jungatur tum aD ſecans circulum ſecundum DFG in b, tum aE ſecans circulum



culum tertium EMF in c. Et compleatur Figura $ABC\,def$ similis & æqualis Figuræ $abc\,DEF$. Dico factum.

Agatur enim Fc ipsi aD occurrens in n, & jungantur aG, bG, QG, QD, PD. Ex constructione est angulus EaD æqualis angulo CAB, & angulus acF æqualis angulo ACB, adeoque triangulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu FnD angulo ABC, adeoque angulo FbD æqualis est; & propterea punctum n incidit in punctum b. Porro angulus GPQ, qui dimidius est anguli ad centrum GPD, æqualis est angulo ad circumferentiam GaD; & angulus GQP, qui dimidius est anguli ad centrum GQD, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam GbD, adeoque æqualis angulo Gba; sunt que ideo triangula GPQ, Gab similia; & Ga est ad ab ut GP ad PQ; id est (ex constructione) ut Ga ad AB. Æquantur itaque ab & AB; & propterea triangula abc, ABC, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trianguli abc latera ab, ac, bc respective, compleri potest Figura $ABC\,def$ Figuræ $abc\,DEF$ similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. *Q. E. F.*



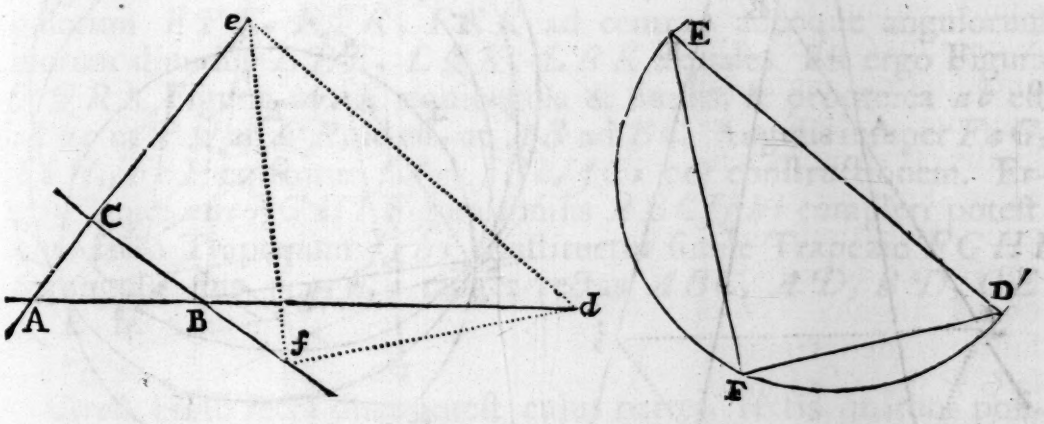
Corol.

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe Triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE rectis poſitione datis AB, AC, & pars data DF rectis poſitione datis AB, BC interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.

Deſcribenda ſit Trajectoria quæ ſit ſimilis & æqualis Lineæ curvæ DEF, quæque a rectis tribus AB, AC, BC poſitione datis, in



partes datis hujus partibus DE & EF ſimiles & æquales ſecabitur.

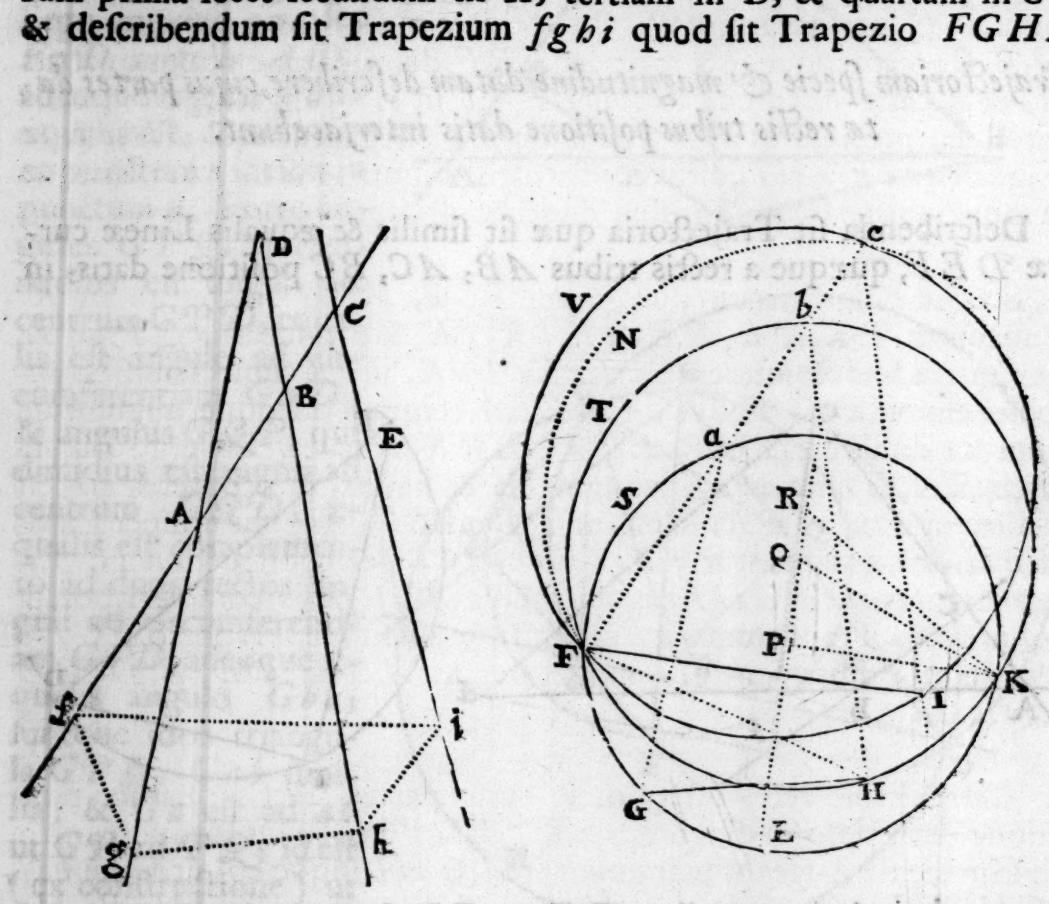
Age rectas DE, EF, DF, & trianguli hujus DEF pone anlos D, E, F ad rectas illas poſitione datas (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum deſcribe Trajectoriam Curvæ DEF ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

De Motu Corporum

LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*, quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio *FGHI*



ſimile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*, cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpective. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angu-

lum

lum æqualem angulo $BA\mathcal{D}$, ſecundum FTH capiat angulum æqualem angulo $CB\mathcal{D}$, ac tertium FVI capiat angulum æqualem angulo ACE. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI, ut literarum $FSGF$ idem ſit ordo circularis qui literarum $BA\mathcal{D}B$, utque literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CB\mathcal{D}C$, & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque $\mathcal{P}$ centrum circuli primi FSG, & $\mathcal{Q}$ centrum ſecundi FTH. Jungatur & utrinque producatur $\mathcal{PQ}$, & in ea capiatur $\mathcal{Q}R$ in ea ratione ad $\mathcal{PQ}$ quam habet BC ad AB. Capiatur autem $\mathcal{Q}R$ ad eas partes puncti $\mathcal{Q}$ ut literarum $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, R idem ſit ordo atque literarum A, B, C: centroque R & intervallo RF deſcribatur circulus quartus FNc ſecans circulum tertium FVI in c. Jungatur Fc ſecans circulum primum in a & ſecundum in b. Agantur aG, bH, cI, & Figuræ $abcFGHI$ ſimilis conſtituatur Figura $ABCfghi$: Eritque Trapezium $fghi$ illud ipſum quod conſtituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi FSG, FTH ſe mutuo in K. Jungantur $\mathcal{P}K$, $\mathcal{Q}K$, RK, aK, bK, cK, & producatur $\mathcal{QP}$ ad L. Anguli ad circumferentias FaK, FbK, FcK ſunt ſemiſſes angulorum $F\mathcal{P}K$, $F\mathcal{Q}K$, FRK ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis $L\mathcal{P}K$, $L\mathcal{Q}K$, LRK æquales. Eſt ergo Figura $\mathcal{PQ}RK$ Figuræ $abcK$ æquiangula & ſimilis, & propterea ab eſt ad bc ut $\mathcal{PQ}$ ad $\mathcal{Q}R$, id eſt, ut AB ad BC. Angulis inſuper FaG, FbH, FcI æquantur fAg, fBh, fCi per conſtructionem. Ergo Figuræ $abcFGHI$ Figura ſimilis $ABCfghi$ compleri poteſt Quo facto Trapezium $fghi$ conſtituetur ſimile Trapezio $FGHI$ & angulis ſuis f, g, h, i tanget rectas ABC, $A\mathcal{D}$, $B\mathcal{D}$, CE Q. E. F.

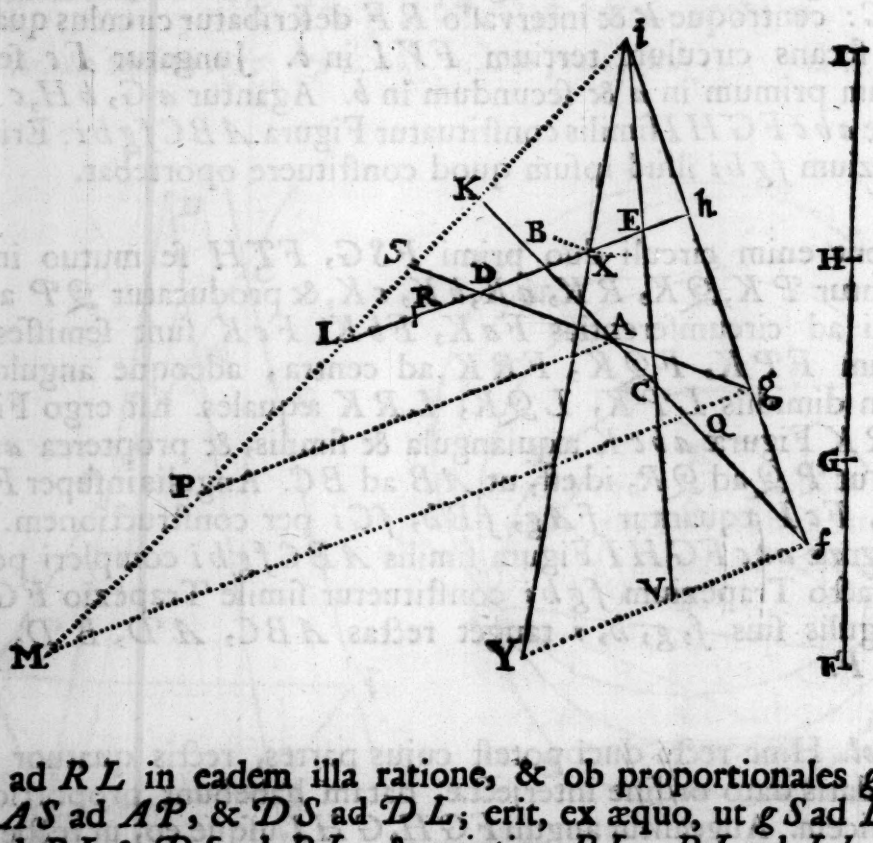
Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI uſque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo Problema, ducetur recta $fghi$ cujus partes fg, gh, hi, rectis quatuor poſitione datis AB & $A\mathcal{D}$, $A\mathcal{D}$ & $B\mathcal{D}$, $B\mathcal{D}$ & CE interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem vero ſic fit expeditius.

Produ-

De Motu Corporum

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut sit BK ad AB ut HI ad GH, & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i. Producatur iL ad M, ut sit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipsi LB parallela rectæque AD occurrens in g, tum gi secans AB, BD in f, h. Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in Q, & AD rectam KL in S, & agatur AP quæ sit ipsi BD parallela & occurrat iL in P, & erunt gM ad Lh (gi ad hi, Mi ad Li, GI ad HI, AK ad BK) & AP ad BL in eadem ratione. Secetur DL in R ut sit



DL ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM, AS ad AP, & DS ad DL; erit, ex æquo, ut gS ad Lh ita AS ad BL & DS ad RL; & mixtim, $BL-RL$ ad $Lh-BL$ ut $AS-DS$ ad $gS-AS$. Id est BR ad Bh ut AD ad Ag adeoque ut BD ad gQ. Et vicissim BR ad BD ut Bh ad gQ, seu fh ad fg. Sed ex constructione linea BL eadem ratione secta fuit in D & R atque linea FI in G & H: ideoque est BR ad BD ut FH ad FG. Ergo fh est ad fg ut FH ad FG. Cum igitur sit etiam gi ad hi ut Mi ad Li, id est, ut GI ad HI, patet lineas FI, fi in g & h, G & H similiter sectas esse. *Q. E. F.*

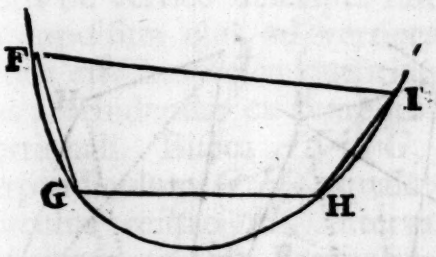
In

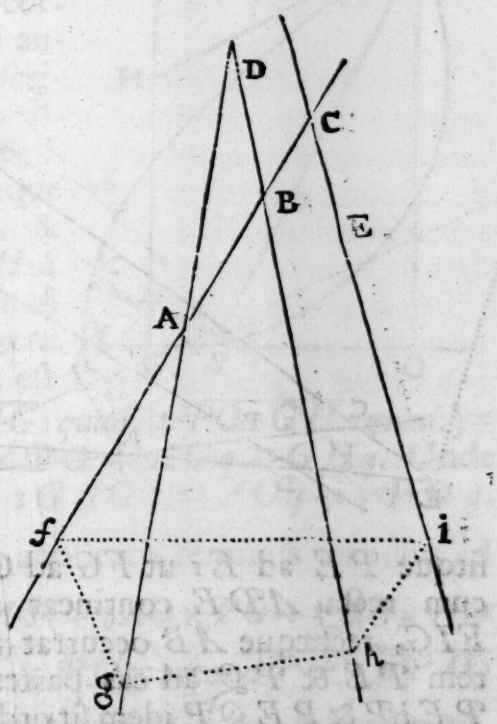
In conſtructione Corollarii hujus poſtquam ducitur LK ſecans CE in i, producere licet iE ad V, ut ſit EV ad Ei ut FH ad HI, & agere Vf parallelam ipſi BD. Eodem recidit ſi centro i, intervallo IH, deſcribatur circulus ſecans BD in X, & producatur iX ad Υ, ut ſit $i\Upsilon$ æqualis IF, & agatur Υf ipſi BD parallela.

Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.



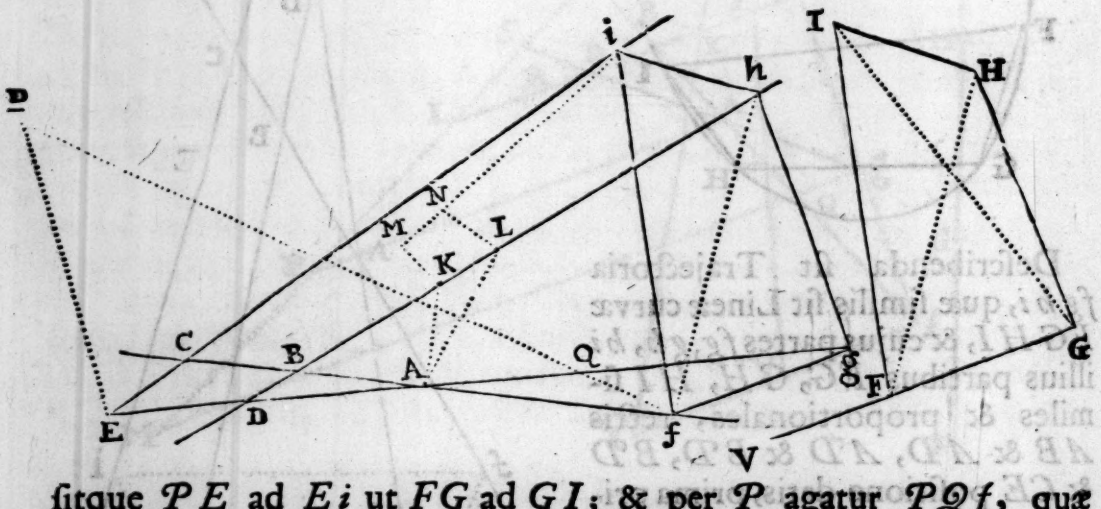


Deſcribenda ſit Trajectoria $fghi$, quæ ſimilis ſit Lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes fg, gh, hi illius partibus FG, GH, HI ſimiles & proportionales, rectis AB & AD, AD & BD, BD & CE poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG, GH, HI, FI, deſcribatur (per Lem. XXVII.) Trapezium $fghi$ quod ſit Trapezio $FGHI$ ſimile & cujus anguli f, g, h, i tangant rectas illas poſitione datas AB, AD, BD, CE, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc Trapezium deſcribatur Trajectoria curvæ Lineæ $FGHI$ conſimilis.

Scholium.

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* conſtituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, ſitque ad *AK* ut eſt *HI* ad *GH*; & *LN* conſtituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, ſitque ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*,



ſitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum recta *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem ſit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & ſi ſuper linea *fi* eodem quoque literarum ordine conſtituatur Trapezium *fghi* Trapezio *FGHI* ſimile, & circumſcribatur Trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de Orbibus inveniendis. Supereſt ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

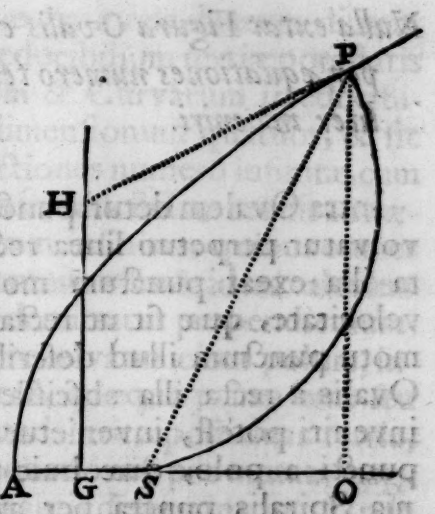
SECTIO

SECTIO VI.

De Inventione Motuum in Orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.



Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitque $4AS \times M$ æquale areæ Parabolicæ abscindendæ APS, quæ radio SP, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale 3 M, & Circulus centro H, intervallo HS descriptus secabit Parabolam in loco quæsito P. Nam, demissa ad axem perpendiculari PO & ducta PH, est $AGq + GHq (= HPq = \overline{AO - AG}$: *quad.* $+ \overline{PO - GH}$: *quad.*$) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO\ (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO}$) = areæ APS. Sed GH erat 3 M, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area abscissa APS æqualis est abscindendæ $4AS \times M$. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et Circulo ASP per corpus motum P perpetuo transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit

in vertice *A*, ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione eſt linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab *A* ad *P*, ea cum velocitate quam habuit in vertice *A*, deſcribere poſſet.

Corol. 3. Hinc etiam vice verſa inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper ea cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet Spiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ Ovalis a recta illa abſciſſæ incrementum per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis eſt, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum Spirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinitæ producta Spiralem ſecat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, adeoque aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam Circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum Conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere.

Unde etiam interſectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex esse possunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum Curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem esse possunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & pluſquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: Curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum Conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & Spiralis interſectiones numero infinitæ, cum Curva hæc ſit ſimplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam ſi a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones Spiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & ideirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo Spiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

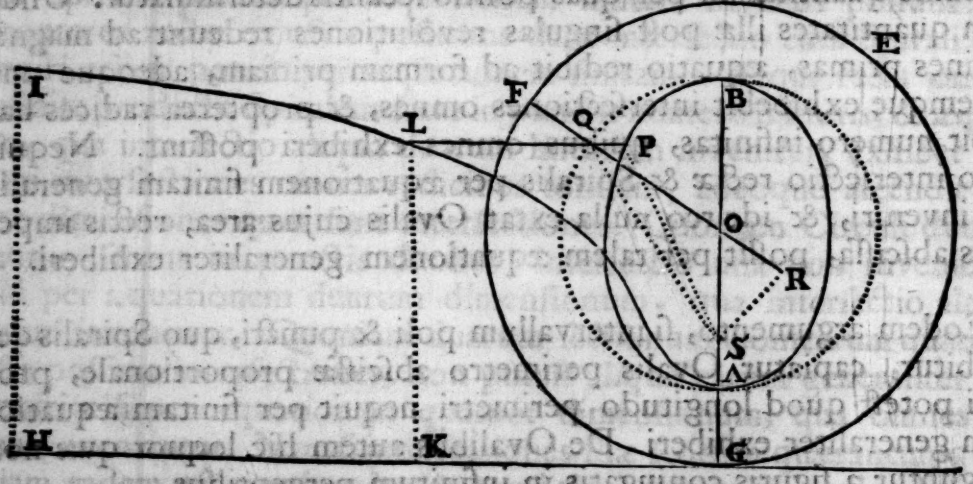
Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæteraque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometrice irrationalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, sitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut sit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque



O & intervallo *OG* describe circulum *EFG*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur Rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A* describendo Trochoidem *ALI*.

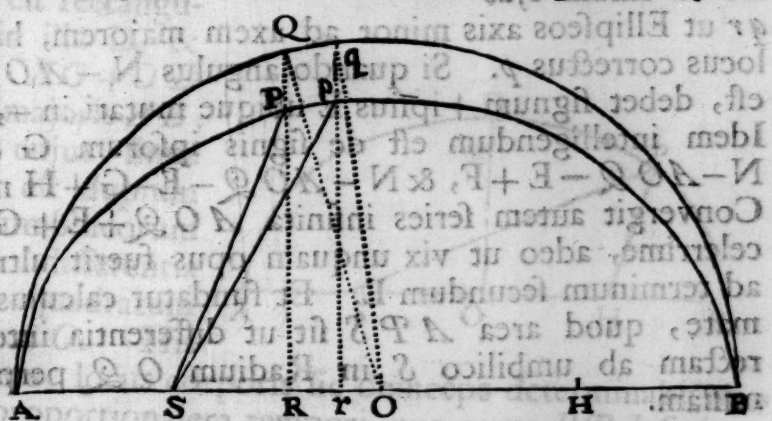
Quo

Quo facto, cape GK in ratione ad Rotæ perimetrum $GEFG$, ut est tempus quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum KL occurrens Trochoidi in L, & acta LP ipsi KG parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito P.

Nam centro O, intervallo OA describatur semicirculus AQB, & arcui AQ occurrat LP producta in Q, junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR. Area APS est ut area AQS, id est, ut differentia inter sectorem OQA & triangulum OQS, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, adeoque (ob æqualitatem datarum rationum SR ad sinum arcus AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad GF, & divisim $AQ - SR$ ad GF – sin. arc. AQ) ut GK differentia inter arcum GF & sinum arcus AQ. *Q.E.D.*

Scholium.

Cæterum, cum difficilis sit hujus Curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57,29578. quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia SH ad Ellipseos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem quamvis (vel utcunque conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P proximus vero ejus loco p. Demissaque ad axem Ellipseos ordinatim applicata PR, ex proportione diametrorum Ellipseos, dabitur Circuli circumscripti AQB ordinatim applicata RQ, quæ sinus est anguli AOQ existente AO radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis,

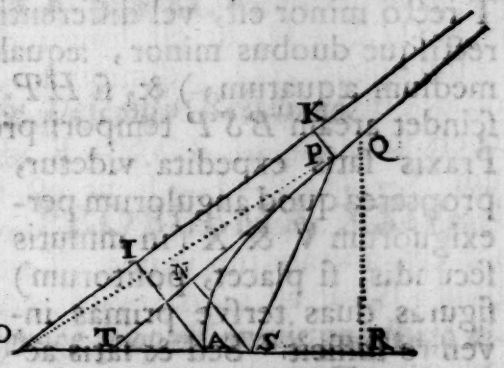


tionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus quo corpus descripsit arcum Ap, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N-AOQ+D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ+E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N-AOQ-E+F$ ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli $AOQ+E$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ+E+G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N-AOQ-E-G+H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $AOQ+E+G$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ+E+G+I+$ &c. et ex cosinu ejus Or & ordinata pr, quæ est ad sinum ejus qr ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Si quando angulus $N-AOQ+D$ negativus est, debet signum $+$ ipsius E ubique mutari in $-$, & signum $-$ in $+$. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli $N-AOQ-E+F$, & $N-AOQ-E-G+H$ negativi prodeunt. Convergit autem series infinita $AOQ+E+G+I+$ &c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS sit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium OQ perpendiculariter demissam.

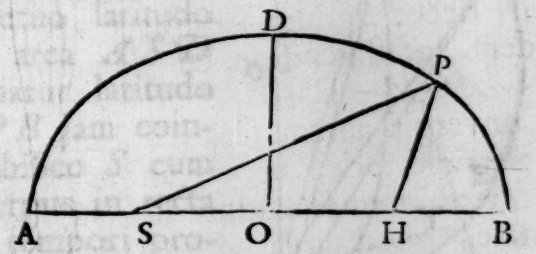


Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus Centrum O, Vertex A, Umbilicus S & Asymptotos OK. Cognoscatur

noſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ SP, quæ aream APS abſcindat veræ proximam. Jungatur OP, & ab A & P ad Aſymptoton agantur AI, PK Aſymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eique æqualis area OPA, quæ ſubducta de triangulo OPS relinquet aream abſciſſam APS. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ APS differentiam duplam $2APS-2A$ vel $2A-2APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ PQ. Inſcribatur autem chorda illa PQ inter A & P, ſi area abſciſſa APS major ſit area abſcindenda A, ſecus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.

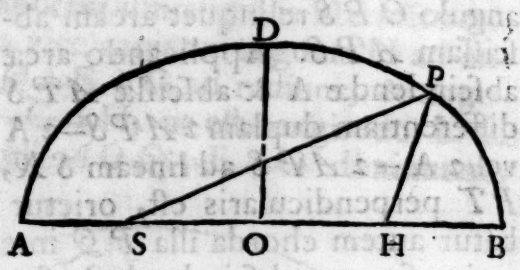


Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum uſibus Aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem OD & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium $AO+OD$ ad quadratum axis majoris AB; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantia SH & differentia illa D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris AO. His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut eſt ſinus dupli anguli T ad Radium; atque

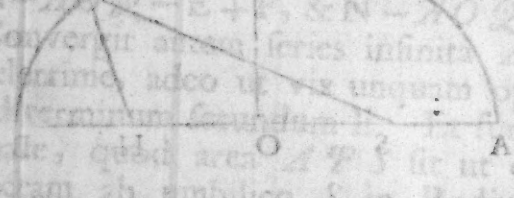


De Motu Corporum

atque angulum X (æquationem ſecundam) ad angulum Z (æquationem maximam ſecundam) ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum Radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T + X + V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T + X − V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) &, ſi *HP* occurrat Ellipſi in *P*, acta *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum) figuras duas terſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad Theoriam Planetarum. Nam in Orbe vel Martis ipſius, cujus Æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & diſtantia *SP* in promptu ſunt per *Wardi* methodum notiſſimam.



Hactenus de Motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi Motus ſpectant, pergo jam exponere.



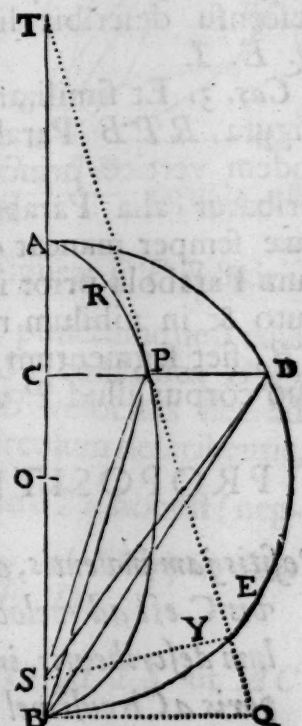
SECTIO

SECTIO VII.

De Corporum Aſcenſu & Deſcenſu Rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

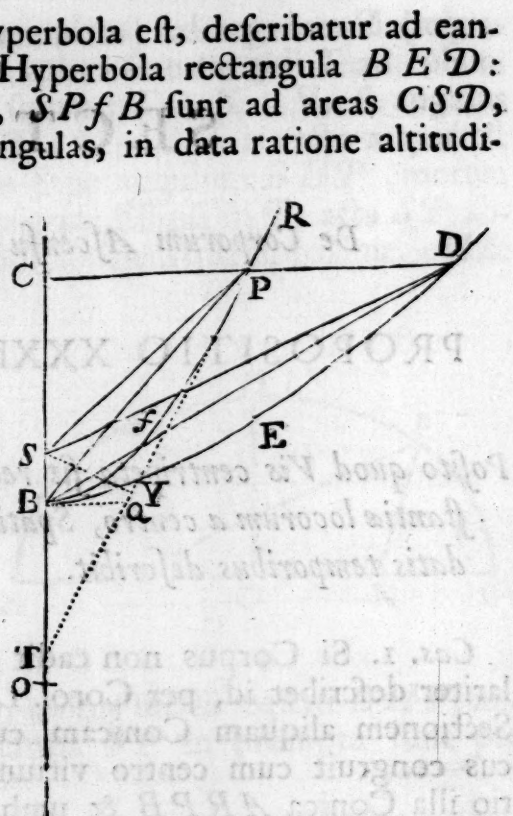
Poſito quod Vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, Spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.



Cas. 1. Si Corpus non cadit perpendiculariter deſcribet id, per Corol. 1. Prop. XIII, Sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit Sectio illa Conica *ARPB* & umbilicus ejus *S*. Et primo ſi Figura Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur Semicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: &, Orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque Spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*

DE MOTU CORPORUM

Cas. 2. Si Figura illa *RPB* Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* ſunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis eſt tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



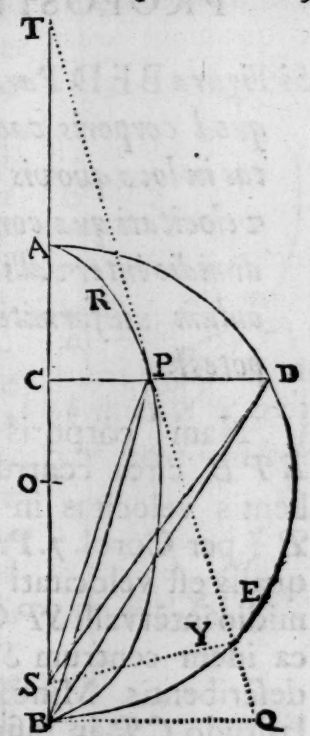
Cas. 3. Et ſimili argumento ſi Figura *RPB* Parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia Parabola *BED*, quæ ſemper maneat data interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet ſegmentum Parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *Circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione quam* AC, *diſtantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad Figuræ ſemidiametrum principalem* ½ AB.

Biſecetur *AB*, communis utriuſque Figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT* quæ tangat Figuram *RPB* in *P*, atque etiam

etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T; sitque ST ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ RPB latus rectum ponatur L. Constat per Cor. 9. Prop. XVI, quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum Circulum describentis in subduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L × SP ad ST quadratum. Est autem ex Conicis ACB ad CPq ut $2AO$ ad L, adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST *quad.* Porro ex Conicis est CO ad BO ut BO ad TO, & compositè vel divisim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit BO −vel + CO ad BO ut CT ad BT, id est AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ RPB latitudo CP, sic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque ST cum linea BQ; & corporis jam recta descendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum describentis, in subduplicata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq) in subduplicata ratione AC ad AO sive $\frac{1}{2}$ AB. *Q. E. D.*

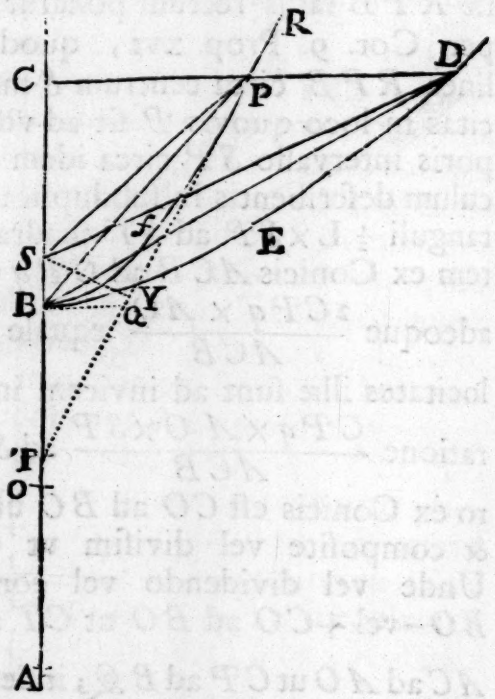


Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam a centro distantiam in Circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si Figura BED *Parabola est, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *Circulum uniformiter describere potest.*



Nam corporis Parabolam *RPB* circa centrum *S* describentis velocitas in loco quovis *P* (per Corol. 7. Prop. XVI) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli *SP* Circulum circa idem centrum *S* uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & constabit Propositio. *Q. E. D.*

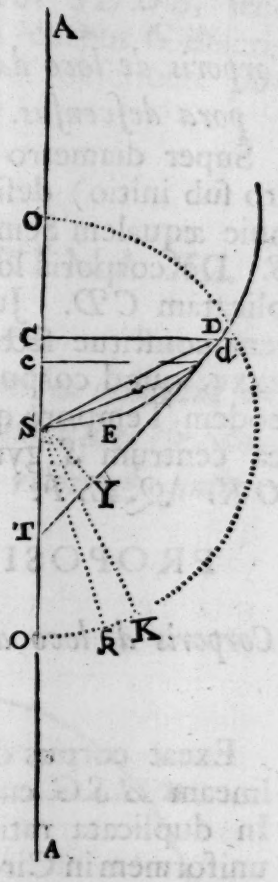
PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod area Figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in Circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia Figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *ST*.

Cas.

Caſ. 1. Jam ſi Figura DES Circulus eſt vel Hyperbola, biſecetur ejus tranſverſa diameter AS in O, & erit SO dimidium lateris recti. Et quoniam eſt TC ad TD ut Cc ad Dd, & TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed per Corol. 1. Prop. XXXIII, eſt TC ad TS ut AC ad AO, puta ſi in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC eſt ad (AO ſeu) SK ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in C eſt ad velocitatem corporis Circulum intervallo SC circa centrum S deſcribentis in ſubduplicata ratione AC ad (AO vel) SK (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis Circulum OKk in ſubduplicata ratione SK ad SC per Cor. 6. Prop. IV, & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola Cc ad arcum Kk in ſubduplicata ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeq; $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id eſt area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Quod ſi Figura DES Parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc eſt ut 2 ad 1, adeoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis eſt velocitati qua Circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per Prop. XXXIV) Et hæc velocitas ad velocitatem qua Circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk (per Corol. 6. Prop. IV) eſt in ſubduplicata ratione SK ad $\frac{1}{2} SC$, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2} CD$. Quare eſt $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, adeoque æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ SDd, ut ſupra. *Q. E. D.*

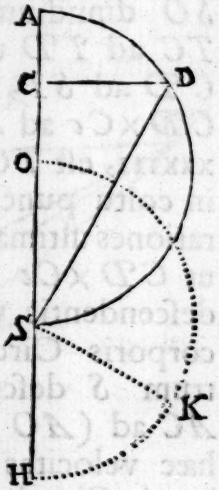
PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare Tempora descensus.*

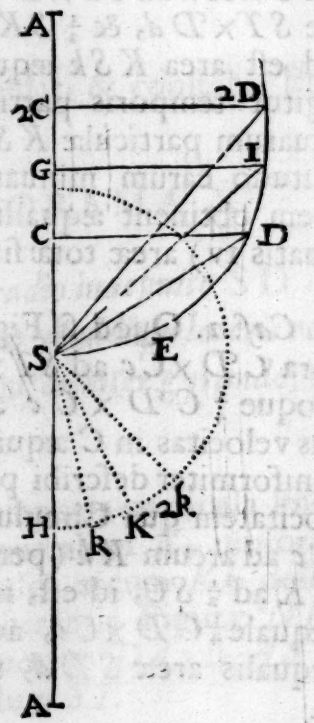
Super diametro *AS* (distantia corporis a centro sub initio) describe Semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem Semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue sectorem *OSK*. Patet per Prop. xxxv, quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Q. E. F.*



PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire Tempora ascensus vel descensus.

Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *ASG* cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo casu Parabola vertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. Patet per Prop. xxxiii. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur Circulus *HKk*, & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in *I* ac *D*.



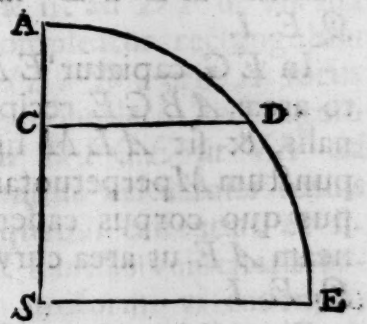
Dein

Dein junctis *SI*, *SD*, fiant ſegmentis *SEIS*, *SEDS*, ſectores *HSK*, *HSk* æquales, & per Prop. xxxv, corpus *G* deſcribet ſpatium *GC* eodem Tempore quo corpus *K* deſcribere poteſt arcum *Kk*. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Poſito quod Vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & Spatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpective proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis *A* ſecundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, deſcribatur Circuli quadrans *AE*, ſitque *CD* ſinus rectus arcus cujuſvis *AD*; & corpus *A*, Tempore *AD*, cadendo deſcribet Spatium *AC*, inque loco *C* acquiret Velocitatem *CD*.



Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione x, quo Propoſitio xxxii, ex Propoſitione xi demonſtrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt Tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

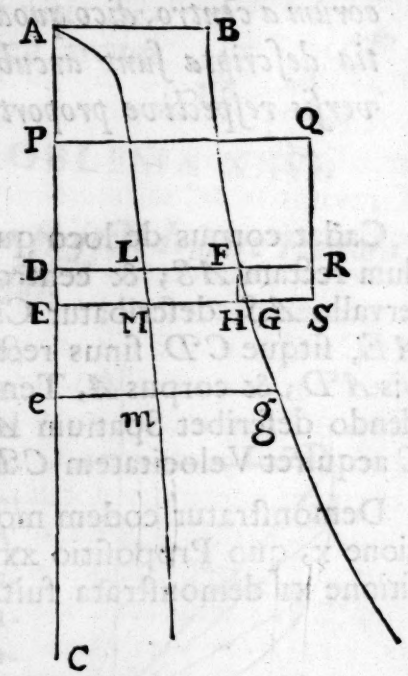
Corol. 2. Proinde æqualia ſunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. iv.) æquantur.

PROPO-

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum Velocitas in locis singulis, tum Tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis A in recta $ADEC$ cadat corpus E, deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: Sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuo tangit. Coincidat autem EG ipso motus initio cum perpendiculari AB, & erit corporis Velocitas in loco quovis E ut areæ curvilineæ $ABGE$ latus quadratum. *Q. E. I.*



In EG capiatur EM lateri quadrato areæ $ABGE$ reciproce proportionalis, & sit ALM linea curva quam punctum M perpetuo tangit, & erit Tempus quo corpus cadendo describit lineam AE ut area curvilinea $ALME$. *Q. E. I.*

Etenim in recta AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, sitque DLF locus lineæ EMG ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut areæ $ABGE$ latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E scribantur V & V + I, erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV + 2VI + II, & divisim area $DFGE$ ut 2VI + II, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, adeoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus quo

corpus

corpus cadendo deſcribit lineolam $\mathcal{D}E$, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, adeoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{\mathcal{D}E}$, hoc eſt, ut longitudo $\mathcal{D}F$. Ergo Vis ipſi $\mathcal{D}F$ vel EG proportionalis facit ut corpus ea cum Velocitate deſcendat quæ ſit ut areæ $ABGE$ latus quadratum. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola $\mathcal{D}E$ deſcribatur, ſit ut velocitas inverſe adeoque ut areæ $ABF\mathcal{D}$ latus quadratum inverſe; ſitque $\mathcal{D}L$, atque adeo area naſcens $\mathcal{D}LME$, ut idem latus quadratum inverſe: erit tempus ut area $\mathcal{D}LME$, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per Corol. Lem. IV) Tempus totum quo linea AE deſcribitur ut area tota AME. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si P ſit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur Gravitas) velocitatem acquirat in loco $\mathcal{D}$ æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquiſivit eodem loco $\mathcal{D}$, & in perpendiculari $\mathcal{D}F$ capiatur $\mathcal{D}R$, quæ ſit ad $\mathcal{D}F$ ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco $\mathcal{D}$, & compleatur rectangulum $P\mathcal{D}R\mathcal{Q}$, eique æqualis abſcindatur area $ABF\mathcal{D}$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $\mathcal{D}RSE$, cum ſit area $ABF\mathcal{D}$ ad aream $\mathcal{D}FGE$ ut VV ad 2 V I, adeoque ut $\frac{1}{2}$V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ ad aream $\mathcal{D}RSE$ ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ $\mathcal{D}F$, $\mathcal{D}R$, adeoque ut areæ naſcentes $\mathcal{D}FGE$, $\mathcal{D}RSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABF\mathcal{D}$, $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque $\mathcal{D}$ data cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam eg, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco $\mathcal{D}$ ut eſt latus quadratum rectanguli $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ area curvilinea $\mathcal{D}Fge$ vel aucti, ſi locus e eſt loco $\mathcal{D}$ inferior, vel diminuti, ſi is ſuperior eſt, ad latus quadratum rectanguli ſolius $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$, id eſt, ut $\sqrt{P\mathcal{Q}R\mathcal{D} + \text{vel} - \mathcal{D}Fge}$ ad $\sqrt{P\mathcal{Q}R\mathcal{D}}$.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD$+vel−$DFge$, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE in subduplicata ratione PD ad PE, id est (lineola DE jamjam nascente) in ratione PD ad $PD+\frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD+DE$, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

SECTIO VIII.

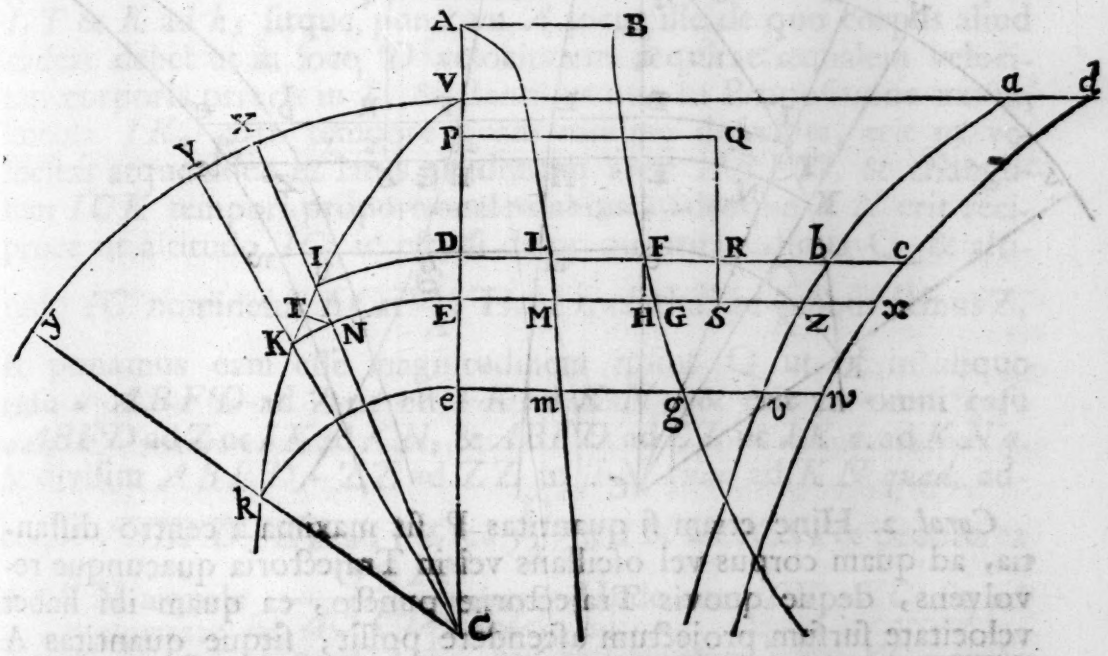
De Inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$. Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; sitque circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates

res æquales. Quoniam diſtantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & ſi vis una IN (per Legum Corol. 2.) reſolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo ſecundum lineam NT corporis curſui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietque ipſum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea $ITKk$ progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera IT, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in D & I acceleratione æqualibus temporibus factæ (ſi ſumantur linearum naſcentium DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ) ſunt ut lineæ DE, IT: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK deſcribuntur, ob æqualitatem velocita-



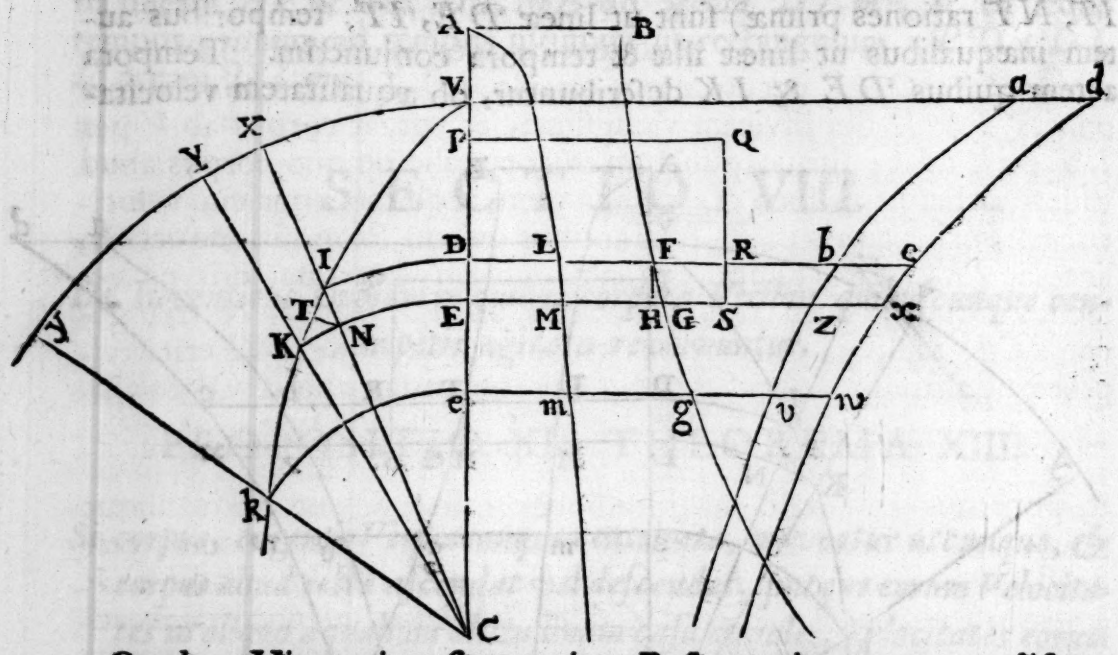
tum ſunt ut viæ deſcriptæ DE & IK, adeoque acceleratione, in curſu corporum per lineas DE & IK, ſunt ut DE & IT, DE & IK conjunctim, id eſt ut DE *quad* & $IT \times IK$ *rectangulum*. Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale eſt IN *quadrato*, hoc eſt, æquale DE *quadrato*; & propterea acceleratione in tranſitu corporum a D & I ad E & K æquales gcnerantur. Æquales igitur ſunt cor-

De Motu Corporum

porum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q. E. D.*

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel funipendulum oſcilletur, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.



Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis Orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus Index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque adeo datur. Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX) eſt in hac ipſa ratione.

PROPO-

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C & invenienda sit Trajectoria $VITKk$. Detur Circulus VXT centro C intervallo quovis CV descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli ID, KE Trajectoriam secantes in I & K rectamque CV in D & E. Age tum rectam $CNIX$ secantem circulos KE, VT in N & X, tum rectam CKT occurrentem circulo VXT in T. Sint autem puncta I & K sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab V per I, T & K ad k; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I; & stantibus quæ in Propositione XXXIX, lineola IK, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ $ABFD$, & triangulum ICK tempori proportionale dabitur, adeoque KN erit reciproce ut altitudo IC, id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est IK ad KN, & erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN, & $ABFD$ ad ZZ ut $IK\,q.$ ad $KN\,q.$ & divisim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut $IN\,quad$ ad $KN\,quad$, adeoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad (Z seu) $\frac{Q}{A}$ ut IN ad KN, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $TX \times XC$ sit ad $A \times KN$ ut $CX\,q$ ad AA, erit rectangulum $TX \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\,quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur si in perpendiculo DF capiantur semper Db, Dc ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX\,quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ ab, cd quas puncta

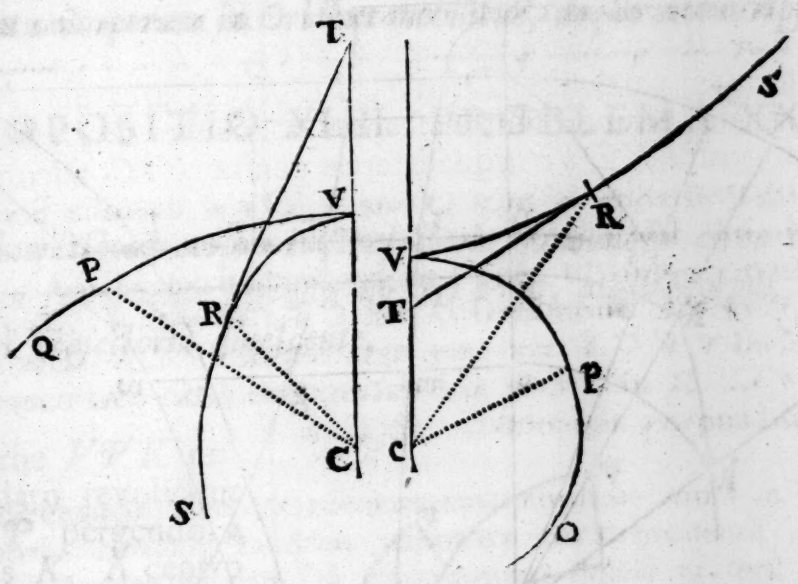
puncta *b*, *c* perpetuo tangunt; deque puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *Vad* abscindens areas curvilineas *VDba*, *VDcd*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum *Db* × *IN* seu *Dbz E* æquale est dimidio rectanguli *A* × *KN*, seu triangulo *ICK*; & rectangulum *Dc* × *IN* seu *Dcx E* æquale est dimidio rectanguli *ϒX* × *XC*, seu triangulo *XCϒ*; hoc est, quoniam arearum *VDba*, *VIC* æquales semper sunt nascentes particulæ *DbzE*, *ICK*, & arearum *VDcd*, *VCX* æquales semper sunt nascentes particulæ *DcxE*, *XCϒ*, erit area genita *VDba* æqualis areæ genitæ *VIC*, adeoque tempori proportionalis, & area genita *VDcd* æqualis Sectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco *V*, dabitur area ipsi proportionalis *VDba*, & inde dabitur corporis altitudo *CD* vel *CI*; & area *VDcd*, eique æqualis Sector *VCX* una cum ejus angulo *VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim Apsides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam *VIK*: id quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, adeoque ubi area *ABFD* æqualis est *ZZ*.

Corol. 2. Sed & angulus *KIN*, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam *IC*, ex data corporis altitudine *IC* expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id est, ut *Z* ad latus quadratum areæ *ABFD*.

Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali *V* describatur Sectio quælibet Conica *VRS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur Tangens *RT* occurrens axi infinite producto *CV* in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis sit abscissæ *CT*, angulumque *VCP* Sectori *VCR* proportionalem constituat; tendat autem ad centrum *C* Vis centripeta Cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco *V* justa cum Velocitate secundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum *P* perpetuo tangit; adeoque si Conica sectio *CVRS* Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunque cum Velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incæperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique

lique ascendere, Figura *CVRS* vel Hyperbola sit vel Ellipsis, inveniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed &, Vi centripeta in centrifugam versa,



ascendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ* quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratia missam facio.

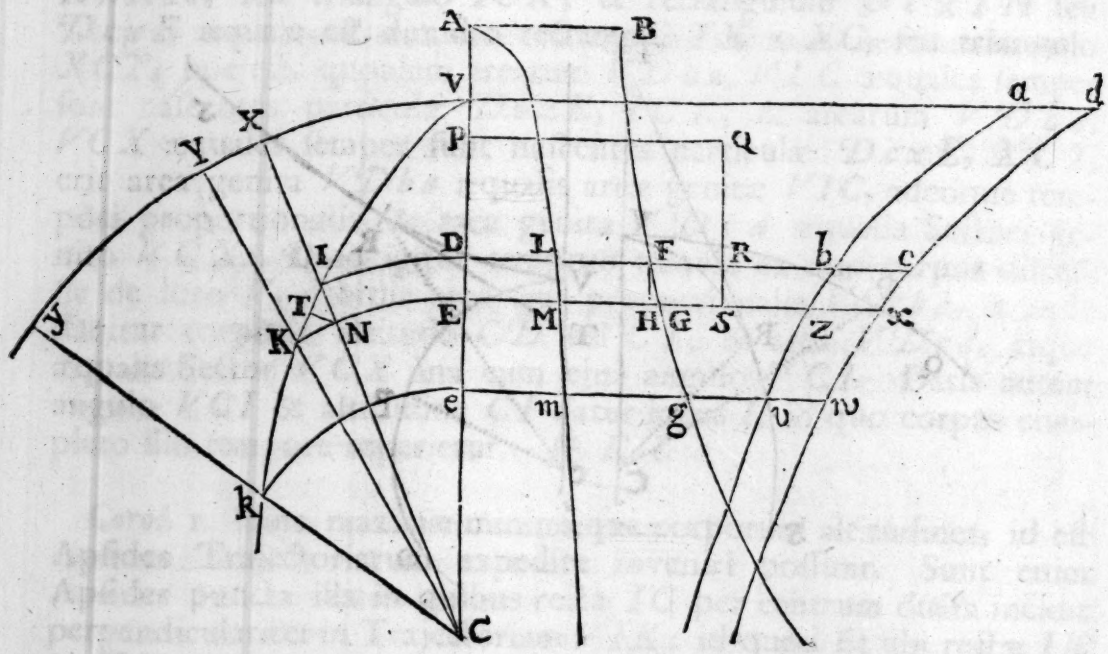
PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege Vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum Velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* secundum lineolam *IT*, ea cum Velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum

De Motu Corporum

primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*, centroque *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *ALMm*, *BFGg*, *abzv*, *dcxw*



ordinatim applicatæ *em*, *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ *BFGg*, *ALMm*, per constructionem Problematis XXVII, & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo *CIT* datur proportio nascentium *IK*, *KN*, & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas *Q*, una cum curvis lineis *abzv*, *dcxw*: adeoque completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis Sector *XCy*, angulusque *ICk* & locus *k* in quo corpus tunc versabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his Propositionibus Vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undeque eandem. Atque hactenus Motum corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de Motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

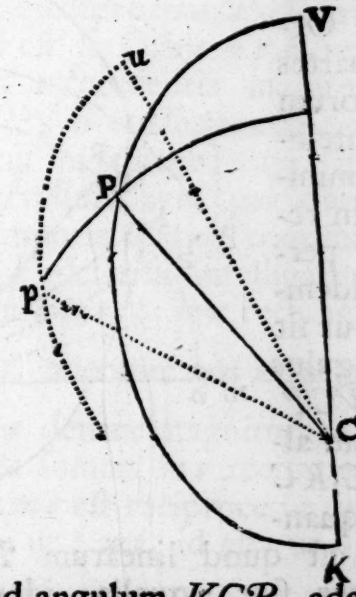
SECTIO

SECTIO IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apſidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum eſt ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quieſcente.

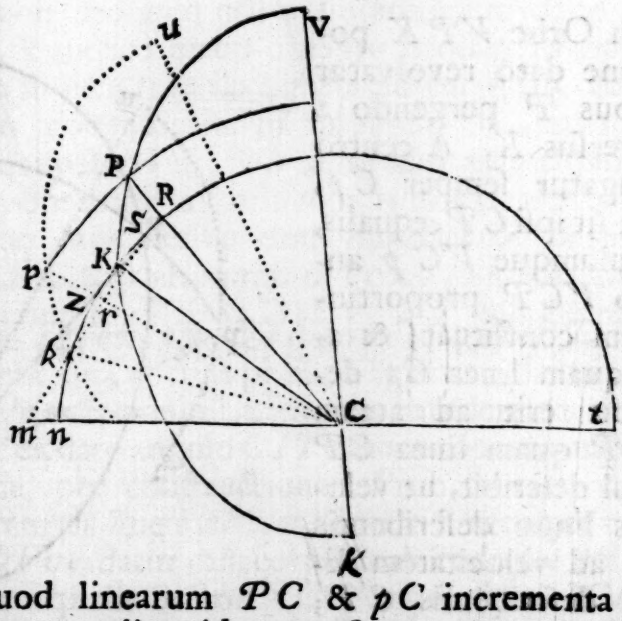


In Orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat; & area quam linea *Cp* deſcribit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* ſimul deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *Cp* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *Cp* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis Vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto *p* in Curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque Figura *uCp* Figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in

De Motu Corporum perimetro Figuræ revolventis uCp, eodemque tempore describet arcum ejus up quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem VP in Figura quiescente VPK describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum propositionis VI, Vis centripeta qua corpus revolvi possit in Curva illa linea quam punctum p describit in plano immobili, & solvetur Problema. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.



Partibus Orbis quiescentis VP, PK sunto similes & æquales Orbis revolventis partes up, pk; & punctorum P, K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculum kr, idemque produc ad m, ut sit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines PC & pC, KC & kC semper æquantur, manifestum est quod linearum PC & pC incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P & p existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas PC, pC determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis PC, pC perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ pC, ad motum angularem lineæ PC, id est, ut

ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu ſuo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p verſus C, adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea pC, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum P acquirit a linea PC, ut eſt motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis alterius P. Quare cum kr æqualis ſit diſtantiæ quam corpus P acquirit a linea PC, ſitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis P, manifeſtum eſt quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora p & P æqualiter ſecundum lineas pC & PC moventur, adeoque æqualibus Viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulum pCn ad angulum pCk ut eſt angulus VCp ad angulus VCP, ſitque nC æqualis kC, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; adeoque Vi majore urgetur quam corpus P, ſi modo angulus mCp angulo kCp major eſt, id eſt ſi Orbis upk vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam ſit dupla ejus qua linea CP in conſequentia fertur; & Vi minore ſi Orbis tardius movetur in antecedentia. Eſtque Virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck deſcribi intelligatur Circulus ſecans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dentur magnitudine, ſunt kr & mr, earumque differentia mk & ſumma ms reciproce ut altitudo pC, adeoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciproce ut quadratum altitudinis pC. Eſt & mt directe ut $\frac{1}{2}mt$, id eſt, ut altitudo pC. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens mn, eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k, eſt ad vim qua corpus motu Circulari revolvi poſſit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in Orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens mn ad ſinum verſum arcus naſcentis RK, id eſt

De Motu Corporum ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut GG−FF ad FF. Et propterea, ſi centro C intervallo quovis CP vel Cp deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus P in Orbe immobili & corpus p in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area VPC uniformiter deſcribere potuiſſet, ut GG−FF ad FF. Namque Sector ille & area pCk ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si Orbis VPK Ellipſis ſit umbilicum habens C & Apſidem ſummam V; eique ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis upk, ita ut ſit ſemper pC æqualis PC, & angulus VCp ſit ad angulum VCP in data ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pC ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in V erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad diſtantiam CV ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide V, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad Circuli ſemidiametrum CV, adeoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet $\frac{RGG-RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in Ellipſi immota VPK, & corpus p in Ellipſi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine CV ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$ qua corpus revolvi poteſt in Ellipſi immobili VPK, addatur exceſſus $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$

qua

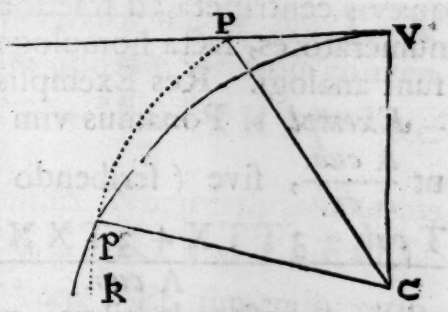
qua corpus in Ellipſi mobili *upk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi Orbis immobilis *VPK* Ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2 R Ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ reſpective.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id eſt radius Circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi poteſt, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eoſdem motus in eadem Trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG-VRFF}{A\,cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam *CV* poſitione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipſi æqualis agatur *Cp*, conſtituens angulum *VCp*, qui ſit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari poteſt in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi poteſt in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam



De Motu Corporum curvam *Vpk*. Eſt autem hæc Curva *Vpk* eadem cum Curva illa *VPQ* in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujuſmodi viribus attracta oblique aſcendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui ſunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apſidum.

Problema ſolvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipſi mobili (ut in Propoſitionis ſuperioris Corol. 2, vel 3) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apſides requiruntur, & quærendo Apſides Orbis quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* Apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maxima *CV*, A pro altitudine quavis alia *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipſi circa umbilicum ſuum *C* (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\,cub.}$, ſubſtituendo T − X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\,cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, adeoque ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, ſive (ſcribendo T − X pro A in Numeratore) ut $\frac{T\,cub. - 3TTX + 3TXX - X\,cub.}{A\,cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet RGG − RFF + TFF ad T *cub.* ut − FF X ad − 3TTX + 3TXX − X *cub.* ſive ut − FF ad − 3 TT + 3 TX − XX. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum

nitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut $-FF$ ad $-3TT$ seu GG ad TT ut FF ad $3TT$ & vicissim GG ad FF ut TT ad $3TT$ id est, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) gradum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum VCp gradum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id adeo ob similitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & Orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi Orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; adeoque G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut

ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam in Ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad Apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; adeoque angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* seu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, adeoque inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127*gr.* 16*m.* 45*sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$, id est, ut $\frac{b\,\text{in}\,\overline{T-X}^m + c\,\text{in}\,\overline{T-X}^n}{A\,cub.}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut $\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}\,\&c.}{A\,cub.}$ &

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV ſeu T Arithmetice per Unitatem, fit GG ad FF ut $b + c$ ad $mb + nc$, adeoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter Apſidem ſummam & Apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus VCp inter eaſdem Apſides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\,cub.}$, angulus inter Apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in Series convergentes denominatorem habentes $A\,cub.$ Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque Unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus In-

dex est $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deque Apside discedens, si cæperit descendere nunquam perveniet ad Apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLI. Sin cæperit illud, de Apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apsidem summam. Describet enim Curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6, Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apside discedens, perinde ut cæperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad Apsidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apside ad Apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de Apside ad Apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apside summa ad Apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id est, reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad Apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apsidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{1}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{2}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$

$A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{1}{4}}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{1}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^4}{A\ cub.}$; erit (in Exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, n æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357,45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1; & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180,7623, id est, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* Igitur corpus de Apside summa discedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoque Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.*

Hactenus de Motu corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Supereſt ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque cen-

De Motu Corporum

tra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo describunt. Et eadem lege Motus corporum in superficiebus Curvis peractos subinde determinamus.

SECTIO X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, dèque Funipendulorum Motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, secundum rectam in Plano illo datam egressi.

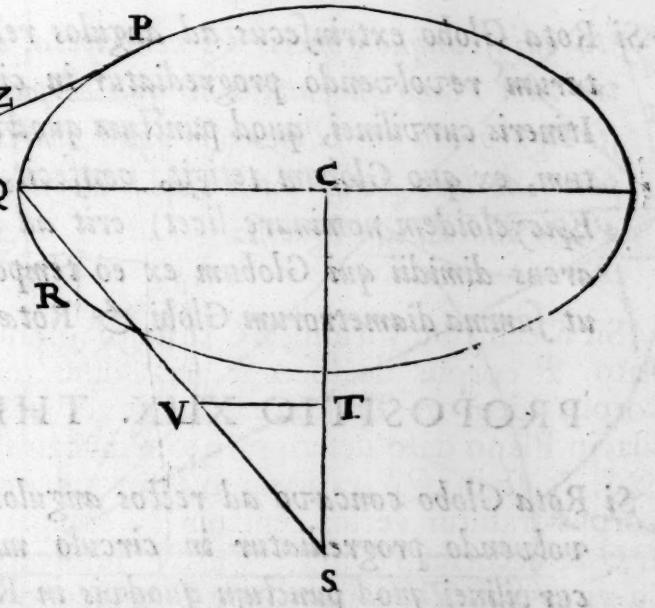
Sit S centrum Virium, SC distantia minima centri hujus a Plano dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & PQR Trajectoria illa, in Plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ QS, & si in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum S, & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum C in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis ST tolleretur, & corpus vi sola TV revolveretur circa centrum C in spatio libero. Data autem

vi

vi centripeta TV qua corpus Q in ſpatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur per Prop. XLII, tum Trajectoria PQR quam corpus deſcribit, tum locus Q in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Poſito quod Vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent Ellipſes, & revolutiones Temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem Temporibus abſolvent.



Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore Propoſitione, vis SV qua corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S eſt ut diſtantia SQ; atque adeo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV qua corpus trahitur verſus punctum C in Orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur verſus punctum C, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum S; & propterea corpora movebuntur iiſdem Temporibus, in iiſdem Figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in ſpatiis liberis circa centrum S; adeoque (per Corol. 2. Prop. x, & Corol. 2. Prop. XXXVIII) Temporibus ſemper æqua-

DE MOTU CORPORUM

æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum C, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum Virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

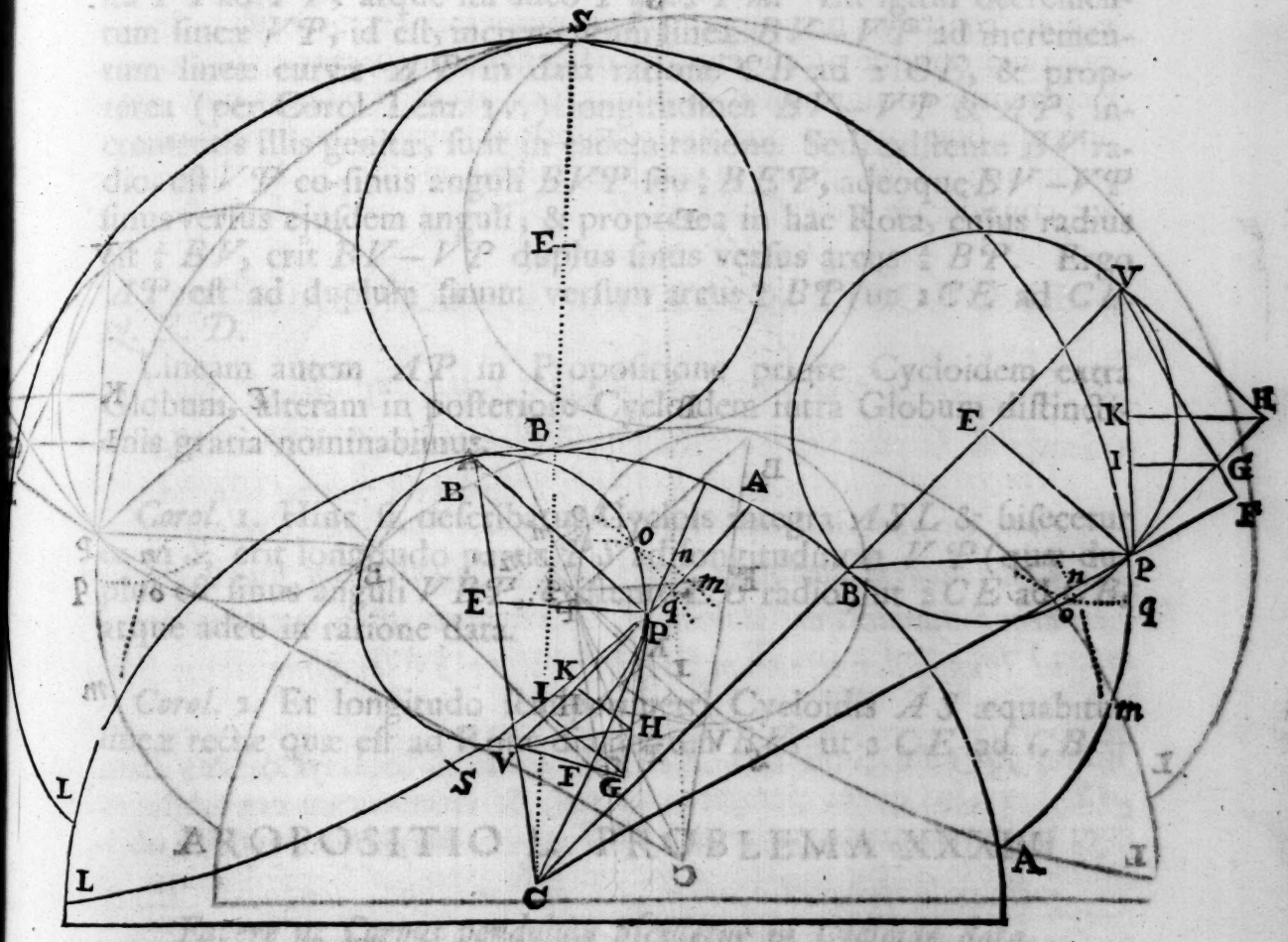
Si Rota Globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

Sit

Sit *ABL* Globus, *C* centrum ejus, *BPV* Rota ei insistens, *E* centrum Rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* versus *L*, & interea eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro Rotæ datum interea describere Viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* Via tota curvilinea descripta ex quo Rota Globum tetigit in *A*, & erit Viæ hujus longitudo *AP* ad duplum



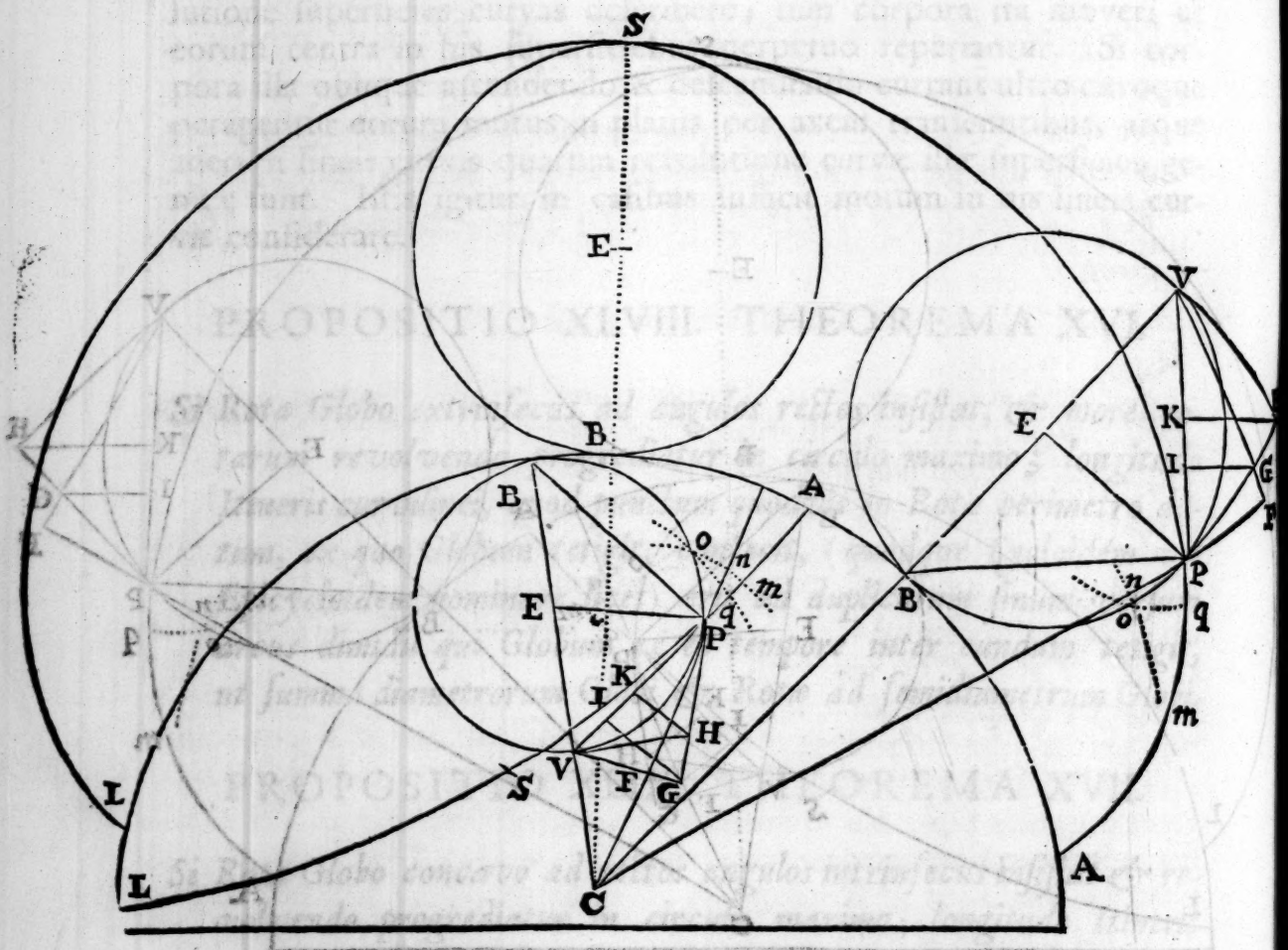
sinum versum arcus ½ *PB*, ut 2 *CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (si opus est producta) occurrat Rotæ in *V*, jungantur que *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* Circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, secetque *PH* ipsam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*.

Centro

De Motu Corporum

Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, Rotæ perimetrum *Bp* in *o*, & Viam curvilineam *AP* in *m*; centroque *V* & intervallo *Vo* deſcribatur circulus ſecans *VP* productam in *q*.

Quoniam Rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifeſtum eſt quod recta *BP* perpendicularis eſt ad



lineam illam curvam *AP* quam Rotæ punctum *P* deſcribit, atque adeo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ *CP*; &, ob ſimilitudinem Figuræ evaneſcentis *Pnomq* & Figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evaneſcentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*,

id

id est, ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcus circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit quæ linearum PV, PF, PG, PI respective. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sunt, angulique HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV seu HP & ita KI ad KP, & composite vel divisim ut CB ad CE ita PI ad PK, & duplicatis consequentibus ut CB ad $2CE$ ita PI ad PV, atque ita adeo Pq ad Pm. Est igitur decrementum lineæ VP, id est, incrementum lineæ $BV-VP$ ad incrementum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad $2CE$, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines $BV-VP$ & AP, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente BV radio, est VP co-sinus anguli BVP seu $\frac{1}{2}BEP$, adeoque $BV-VP$ sinus versus ejusdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius est $\frac{1}{2}BV$, erit $BV-VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad CB. *Q. E. D.*

Lineam autem AP in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra ASL & bisecetur ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP, existente EB radio) ut $2CE$ ad CB, atque adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ quæ est ad Rotæ diametrum BV, ut $2CE$ ad CB.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

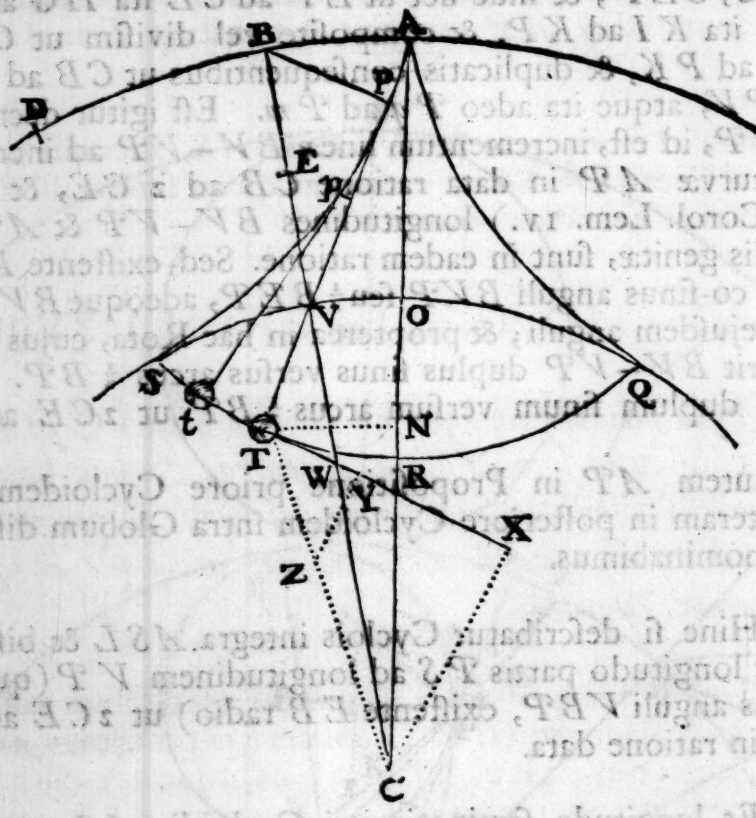
Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum QVS, centro C descriptum, detur Cyclois QRS bisecta in R & punctis suis extremis Q & S superficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur CR bisecans arcum QS in O, & producatur ea ad A, ut sit CA ad CO ut CO ad CR. Centro C in-

 tervallo

De Motu Corporum

tervallo CA describatur Globus exterior ABD, & intra hunc Globum a Rota, cujus diameter sit AO, describantur duæ Semicycloides AQ, AS, quæ Globum interiorem tangant in Q & S & Globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, Filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra Semicycloides AQ, AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo AR,



Filum parte sui superiore AP applicetur ad Semicycloidem illam APS versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliqua PT cui Semicycloïs nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in Cycloide data QRS. *Q. E. F.*

Occurrat enim Filum PT tum Cycloidi QRS in T, tum circulo QOS in V, agaturque CV; & ad Fili partem rectam PT, e punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula PB, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, ex constructione & genesi similium Figurarum AS, SR, perpendicula illa PB, TW abscindere de CV longitudines VB, VW Rotarum diametris OA, OR æquales. Est igitur TP ad VP (duplum sinum anguli VBP existente $\frac{1}{2}BV$ radio)

dio) ut BW ad BV, seu $AO+OR$ ad AO, id est (cum sint CA ad CO, CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales,) ut $CA+CO$ ad CA vel, si bisecetur BV in E, ut $2CE$ ad CB. Proinde, per Corol. 1. Prop. XLIX, longitudo partis rectæ Fili PT æquatur semper Cycloidis arcui PS, & Filum totum APT æquatur semper Cycloidis arcui dimidio APS, hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX) longitudini AR. Et propterea vicissim si Filum manet semper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide data QRS. *Q. E. D.*

Corol. Filum AR æquatur Semicycloidi AS, adeoque ad semidiametrum AC eandem habet rationem quam similis illi Semicycloidis SR habet ad semidiametrum CO.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si Vis centripeta tendens undique ad Globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola Vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis* QRS: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt Tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta qua corpus T impellitur versus C est ut distantia CT, atque hæc (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes CX, TX, quarum CX impellendo corpus directe a P distendit filum PT & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX, urgendo corpus transversim seu versus X, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo TX, id est, (ob datas CV, WV iisque proportionales TX, TW,) ut longitudo TW, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX,) ut longitudo arcus Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, Apt de perpendiculo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR, tR. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describen-

De Motu Corporum

dæ & acceleràtiones ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur acceleràtiones atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum AR. Cumque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo R, per eoſdem arcus Cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloidis partes duæ RS & RQ ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. *Q. E. D.*

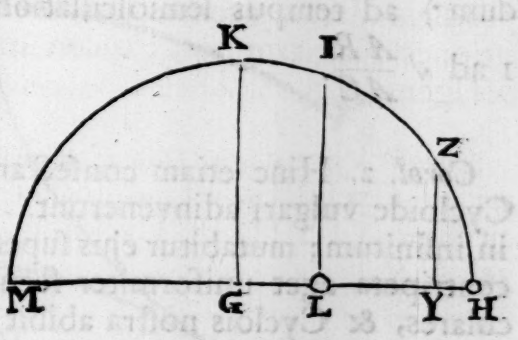
Corol. Vis qua corpus T in loco quovis T acceleratur vel retartur in Cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem Pondus in loco altiſſimo S vel Q, ut Cycloidis arcus TR ad ejuſdem arcum SR vel QR.

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Deſinire & Velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & Tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis G, intervallo GH Cycloidis arcum RS æquante, deſcribe ſemicirculum $HKMG$ ſemidiametro GK biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum G, ſitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro Globi QOS (*Vide Fig. Prop.* L.) ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum T dimittitur e loco ſupremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis TR, LG ſemper proportionales, atque adeo, ſi æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa deſcribere ſpatia ST, HL æqualia ſub initio, adeoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare, per Prop. XXXVIII, tempus quo corpus deſcribit arcum ST eſt ad tempus oſcil-

oſcillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H perveniet ad L) ad ſemiperipheriam HKM (tempus quo corpus H perveniet ad M.) Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR. Unde cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.



Oſcillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diverſis intra Globos diverſos, quorum diverſæ ſunt etiam Vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi Vis abſoluta Globi cujuſvis QOS dicatur V, Vis acceleratrix qua Pendulũ urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe verſus centrum ejus moveri, erit ut diſtantia Corporis penduli a centro illo & Vis abſoluta Globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque lineola HT, quæ ſit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi erigatur normalis TZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicata ratione rectanguli GHT, adeoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde Tempus oſcillationis integræ in Cycloide QRS (cum ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directe, utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inverſe) fiet ut GH directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſe, hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per Corol. Prop. L) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque Oſcillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum Viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione longitudinis Fili directe, & ſubduplicata ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum Globi

DE MOTU CORPORUM

Globi inverſe, & ſubduplicata ratione Vis abſolutæ Globi etiam inverſe. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam Oſcillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi Rotæ, qua Cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi tranſiens, & Oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hac recta. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per Caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Cycloide quavis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi Globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, Viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus:* Et Pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius.* Sed & Deſcenſus gravium, tempore Oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

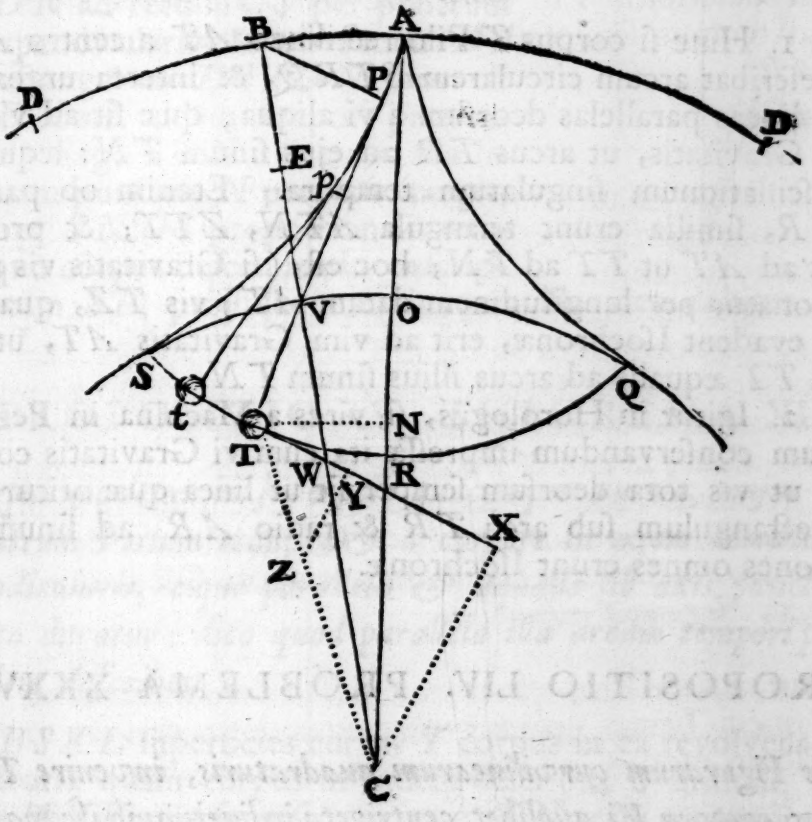
Aptantur autem Propoſitiones a nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu Clavorum, perimetris ſuis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus intra globos Oſcillari debent, ut Oſcillationes omnes evadant Iſochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie Terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PROPO-

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Vires quibus corpora in datis curvis lineis Oſcillationes ſemper Iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis ſit *OR* tranſiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco quovis *T* contingat, inque hac tangente *TX*



capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex Figurarum quadraturis (per Methodos vulgares) innoteſcit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit Vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. *Q. E. I.*

Nam

DE MOTU CORPORUM

Nam si vis, qua corpus trahitur de T versus C, exponatur per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus secundum longitudinem Fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus T Filo rectilineo AT a centro A pendens, describat arcum circularem $STRQ$, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem Gravitatis, ut arcus TR ad ejus sinum TN: æqualia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, similia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN; hoc est, (si Gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT) vis TZ, qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim Gravitatis AT, ut arcus TR ipsi TY æqualis ad arcus illius sinum TN.

Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi Gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio AR ad sinum TN, Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

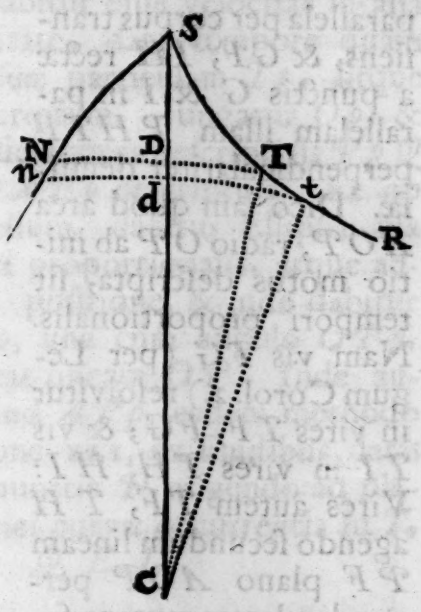
PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Tempora quibus corpora Vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum Virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S per lineam quamvis curvam $STtR$, in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd

partium

partium illarum aliqua. Centro C, intervallis CD, Cd describantur circuli DT, dt, lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine CT, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt, est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli tTC) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis, & ob datam Dd erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si SNn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, erit area $SNDS$ proportionalis tempori quo corpus descendendo describit lineam ST; proindeque ex inventa illa area dabitur Tempus. *Q. E. I.*



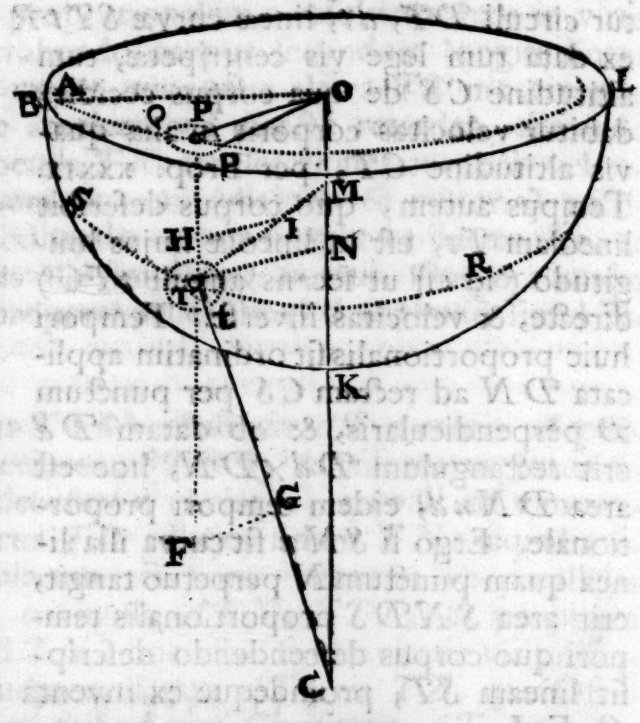
PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum Virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit $BSKL$ superficies curva, T corpus in ea revolvens, $STtR$ Trajectoria quam corpus in eadem describit, S initium Trajectoriæ, $OMNK$ axis superficiei curvæ, TN recta a corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela & æqualis a puncto O quod in axe datur educta, AP vestigium Trajectoriæ a puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum, A vestigii initium puncto S respondens, TC recta a corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum C proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis, TI pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem viciſſimque urgetur versus M

De Motu Corporum

a superficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus secundum positionem plani factus, hoc est, motus puncti *P* quo Trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano *AOP*, vi centripeta ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describitur area *AOP* (per Prop. 1.) tempori proportionalis. *Q.E.D.*



Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege Vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum Velocitate, versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stanti-

Stantibus quæ in ſuperiore Propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam $STtR$; &, ex data ejus velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine TC. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, deſcribat corpus Trajectoriæ ſuæ particulam Tt, ſitque Pp veſtigium ejus in plano AOP deſcriptum. Jungatur Op, & Circelli centro T intervallo Tt in ſuperficie curva deſcripti ſit PpQ veſtigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ deſcriptum. Et ob datum magnitudine & poſitione Circellum, dabitur Ellipſis illa PpQ. Cumque area POp ſit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur Op poſitione, & inde dabitur communis ejus & Ellipſeos interſectio p, una cum angulo OPp, in quo Trajectoriæ veſtigium APp ſecat lineam OP. Inde autem invenietur Trajectoriæ veſtigium illud APp, eadem methodo qua curva linea $VIKk$, in Propoſitione XLI, ex ſimilibus datis inventa fuit. Tum ex ſingulis veſtigii punctis P erigendo ad planum AOP perpendicula PT ſuperficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur ſingula Trajectoriæ puncta T. *Q. E. I.*

SECTIO XI.

De Motu Corporum Viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui Motus corporum attractorum ad centrum Immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per Legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia ſe mutuo attrahant) hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo Motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur Impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur, & propterea miſſis diſputationibus Phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

De Motu Corporum

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

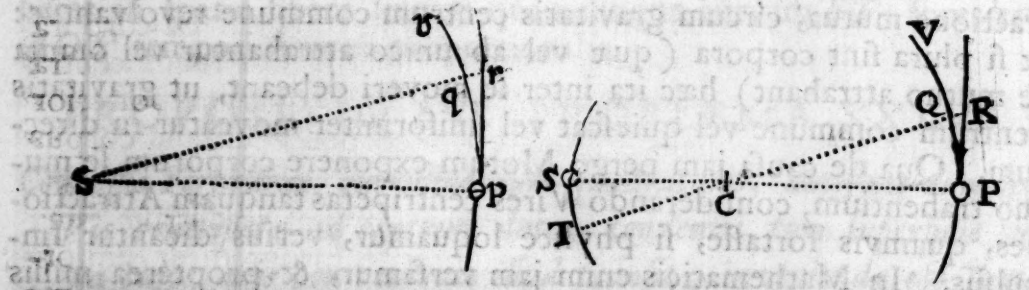
Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, Figuras similes.

Sunt enim distantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, Figuras circum eosdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt Figuræ quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest Figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis



SP, *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & Curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, describit,

deſcribit, erit ſimilis & æqualis Curvis quas corpora S, P deſcribunt circum ſe mutuo: proindeque (per Theor. xx) ſimilis Curvis ST & PQV, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum C: id adeo quia proportiones linearum SC, $C\mathcal{P}$ & SP vel sp ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C, per Legum Corollarium quartum, vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quieſcit, inque s & p locentur corpora duo, immobile in s, mobile in p, corporibus S & P ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr Curvas PQ & pq in P & p, & producantur CQ & sq ad R & r. Et, ob ſimilitudinem Figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit RQ ad rq ut CP ad sp, adeoque in data ratione. Proinde ſi vis qua corpus P verſus corpus S, atque adeo verſus centrum intermedium C attrahitur, eſſet ad vim qua corpus p verſus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus PR, pr ad arcus PQ, pq, per intervalla ipſis proportionalia RQ, rq; adeoque vis poſterior efficeret ut corpus p gyraretur in Curva pqv, quæ ſimilis eſſet Curvæ PQV, in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione CP ad sp, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum S & s, P & p, & æqualitatem diſtantiarum SP, sp) ſibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius p trahatur per intervallum majus rq, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) ſpatia, ipſo motus initio deſcripta, ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p eſſe ad velocitatem corporis P in ſubduplicata ratione diſtantiæ sp ad diſtantiam CP, eo ut temporibus quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione deſcribantur arcus pq, PQ, qui ſunt in ratione integra: Et corpora P, p viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia C & s Figuras ſimiles PQV, pqv, quarum poſterior pqv ſimilis eſt & æqualis Figuræ quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium ſextum, motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, adeoque corpora deſcribent

bent circum ſe mutuo Figuras eaſdem ac prius, & propterea Figuræ *pqv* ſimiles & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo Viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt (per Prop. x,) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Ellipſes concentricas: & vice verſa, ſi tales Figuræ deſcribuntur, ſunt Vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus deſcribunt (per Prop. xi, xii, xiii) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ deſcribuntur. Et vice verſa, ſi tales Figuræ deſcribuntur, Vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuo ductis, deſcribunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S & P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium Tempus periodicum eſſe ad Tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis & Figuris quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt Figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicata ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S + P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris Propoſitionis, tempora quibus arcus quivis ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc eſt, in ſubduplicata ratione corporis *S* ad ſummam corporum *S* + *P*. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota quibus Figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem ſubduplicata ratione. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis *S* ad summam corporum *S* + *P*. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipseos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio *S* ad *S* + *P* est triplicata; adeoque erit ad axem principalem Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter *S* + *P* & *S* ad *S* + *P*. Et inverse, axis principalis Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut *S* + *P* ad primam duarum medie proportionalium inter *S* + *P* & *S*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto Viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium,

De Motu Corporum

dium, adeoque eædem ſunt ac ſi a corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam data eſt ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam corporis ejuſdem a corpore altero, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia & quantitatibus totidem datis datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, Vis trahentis eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.

Corpora (per Theorema noviſſimum) perinde movebuntur ac ſi a corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per Hypotheſin; & propterea (per Legum Corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per Prob. XXV,) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.

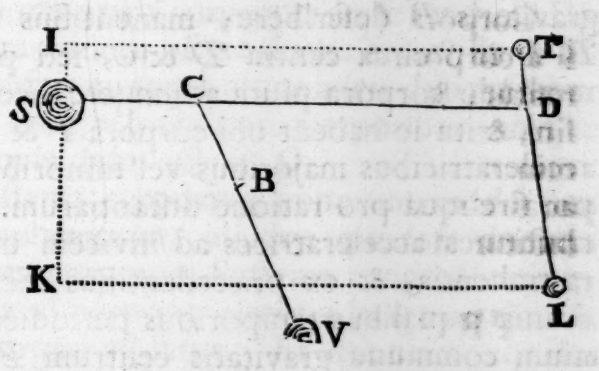
Ex

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per Legum Corollarium quintum, & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato, ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille Syſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur Motus plurium Corporum inter ſe.

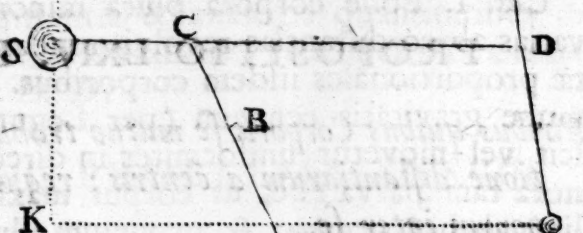
Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Deſcribent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI) Ellipſes centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex Problemate V, innoteſcit.



Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis *ST* (per Legum Cor. 2.) reſolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ ſunt ut ipſarum ſumma *TL*, atque adeo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, ſed

De Motu Corporum

viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. x. & Corol. 1 & 8. Prop. iv) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI, LK, ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus faciendo ut Systema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S (eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiæ CS proportionalium, tendit versus centrum C) describit Ellipsin circa idem C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, describet Ellipsin consimilem e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, posterius posteriore) æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum est) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D. Ellipses suas describere, ut prius. *Q. E. I.*



Addatur jam corpus quartum V, & simili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

Hæc ita se habent ubi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili describunt. *Q. E. I.*

PRO-

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt ut corpora, ſecundum Legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in Ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab Ellipſibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, abſque errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora uſque donec error iſte & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, abſque errore qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Cas. 2. Fingamus jam Syſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum Syſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut Syſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum,

nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; &, augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ reſpectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores ſint quam datæ quævis, perſeverabunt motus partium Syſtematis inter ſe abſque erroribus qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, Syſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipſin fortiore,) & Radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, abſque ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ (perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Syſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Syſtematis inter ſe; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Syſtematis verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quam inæqualitas proportionis diſtantiarum a corpore maximo: Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque ſit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi Syſtematis hujus partes in Ellipſibus vel Circulis ſine perturbatione inſigni moveantur; manifeſtum eſt, quod

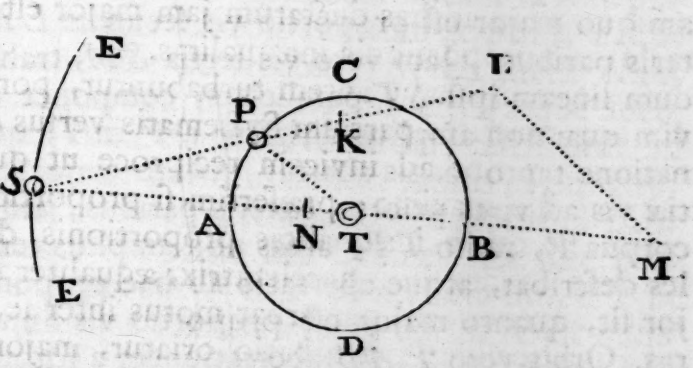
eædem

eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter & ſecundum lineas parallelas quamproxime.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si Corpora tria, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & Figuram ad formam Ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

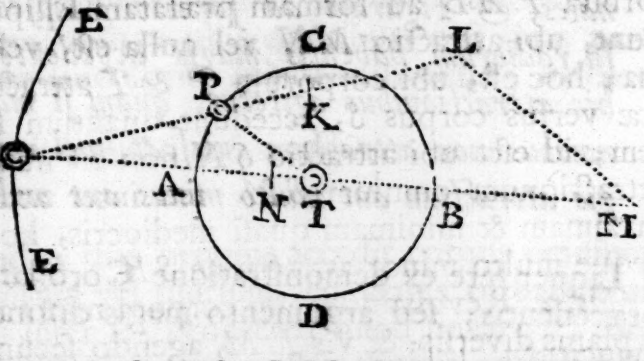
Liquet fere ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.



Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P deſcribat Orbem interiorem PAB, & S exteriorem SE. Sit SK mediocris diſtantia corporum P & S; & corporis P verſus S attractio acceleratrix in mediocri illa diſtantia exponatur per eandem. In duplicata ratione SK ad SP capiatur SL ad SK, & erit SL attractio acceleratrix corporis P verſus S in diſtantia quavis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M, & attractio SL reſolvetur (per Legum Corol 2.) in attractiones SM, LM. Et ſic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici: una

De Motu Corporum

una tendente ad T & oriunda a mutua attractione corporum T & P. Hac vi ſola corpus P circum corpus T, ſive immotum ſive hac attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio PT, temporibus proportionales, & Ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis T. Patet hoc per Prop. XI. & Corollaria 2 & 3 Theor. XXI. Vis altera eſt attractionis LM, quæ quoniam tendit a P ad T, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſa, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PT reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Prop. XI, & per Corol. 2. Theor. XXI) vis qua Ellipſis circa umbilicum T deſcribitur tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ PT reciproce proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis PAB aberret a forma Ellipſeos umbilicum habentis in S; idque eo magis quo major eſt aberratio ab hac proportione; atque adeo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ LM ad vim primam, cæteris paribus.



Jam vero vis tertia SM, trahendo corpus P ſecundum lineam ipſi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a P in T, quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atque adeo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat, atque aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigatur a P ad T, tum etiam quod non ſit proportionalis quadrato diſtantiæ PT. Quibus intellectis, manifeſtum eſt quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis PAB tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.

Expo-

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam SN; & si attractiones acceleratrices SM, SN æquales essent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio SN minor esset attractione SM, tolleret ipsa attractionis SM partem SN, & maneret pars sola MN, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio SN major esset attractione SM, oriretur ex differentia sola MN perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN, attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita PAB ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ versus corpus S, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minima attractionum omnium SM, sed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione SK. *Q. E. D.*

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diversis; & vis LM, agendo secundum lineam PT in plano Orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM, agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est, (atque adeo, quando corpus S versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN, adeoque minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio SN non est multo major, neque multo minor attractione SK. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod, si corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atque cætera a se mutuo.

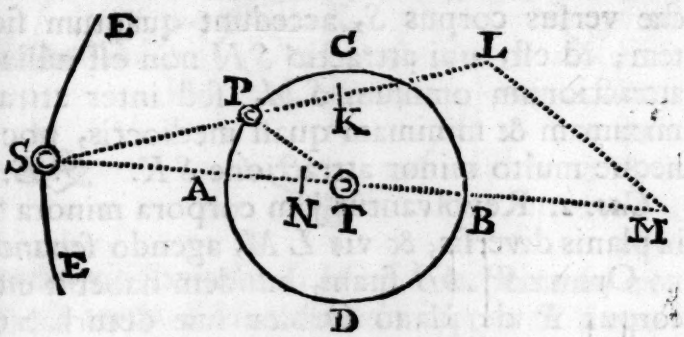
Corol.

De Motu Corporum

Corol. 2. In Syſtemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius deſcribet prope Conjunctionem *A* & Oppoſitionem *B*, quam prope Quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam *PT* accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis *NM*. Hæc in tranſitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad *B*, & ultimo in antecedentia tranſeundo a *B* ad *C*.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppoſitione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in Quadraturis quam in Conjunctione & Oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL* vel *NM*, in Conjunctione & Oppoſitione, contraria eſt vi qua corpus *T* trahit corpus *P*, adeoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.



Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in Quadraturis, quam in Conjunctione & Oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu Excentricitatis. Nam ſi Orbita corporis *P* excentrica ſit: Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi Apſides ſunt in Syzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus *P*, ad Apſidem ſummam appellans, abſit longius a corpore *T* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in Orbe ſuo, augetur in Quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione compoſita ex ratione ſimplici radii *TP* directe & ratione duplicata temporis

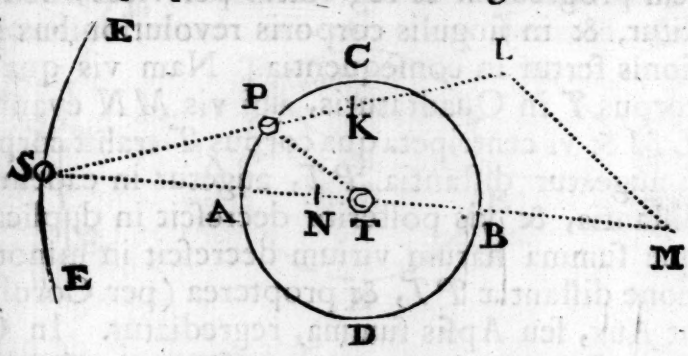
ris periodici inverſe: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis KL, adeoque tempus periodicum, ſi maneat Orbis radius TP, augeri, idque in ſubduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione ſeſquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus P minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro T; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui S, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices; augebitur ſimul ac diminuetur Radius TP per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata Radii & ratione ſubduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam quod Ellipſeos a corpore P deſcriptæ Axis, ſeu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & in ſingulis corporis revolutionibus per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, ſi augeatur diſtantia PT, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, adeoque ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ PT, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux, ſeu Apſis ſumma, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppoſitione, vis qua corpus P urgetur in corpus T differentia eſt inter vim qua corpus T trahit corpus P & vim KL; & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione diſtantiæ PT, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ PT, adeoque (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus Augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis KL in Syzygiis ſit quaſi duplo major quam vis LM in Quadraturis, exceſſus in tota revolutione erit penes vim KL, transferetque Augem ſingulis revolutionibus in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Syſtema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S' &c. in Orbe ESE conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actioni-

bus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ TP, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atque adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM-LM$, progredientur velocius, inque Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente



in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoque Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum T, P, S, ubi Apsides Orbis PAB sunt in Quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est,

&

& maxima fit ubi Apſides ſunt in Syzygiis. Si Apſides conſtituantur in Quadraturis, ratio prope Apſides minor eſt & prope Syzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velociſſimus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter Apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in minore quam duplicata ratione diſtantiæ Apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam Apſidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apſides conſtituuntur in Syzygiis, vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in majore quam duplicata ratione diſtantiarum. Nam vires LM in Quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in Syzygiis ſubductæ viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter Apſides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in tranſitu Apſidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipſeos; inque tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis EST immobile manere; & ex errorum expoſita cauſa manifeſtum eſt quod, ex viribus NM, ML, quæ ſunt cauſa illa tota, vis ML agendo ſemper ſecundum planum Orbis PAB, nunquam perturbat motus in Latitudinem; quodque vis NM, ubi Nodi ſunt in Syzygiis, agendo etiam ſecundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpuſque P de plano Orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At ſi Nodi conſtituantur in Octantibus poſt Quadraturas, id eſt, inter C & A, D & B, intelligetur ex modo expoſitis quod, in tranſitu corporis P a Nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in Nodo ſubſequente quam in præcedente.

De Motu Corporum

dente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi Nodi ſunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi ſunt in Syzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in ſingulis corporis ad Nodos appulſibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi ſunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus quibus antea decreverat, Nodiſque ad Syzygias proximas appulſis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi Nodi ſunt in Quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis ſui, idque in partem verſus *S*, in tranſitu ſuo a Nodo *C* per Conjunctionem *A* ad Nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu a Nodo *D* per Oppoſitionem *B* ad Nodum *C*; manifeſtum eſt quod in motu ſuo a Nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum Orbis *EST* non in plani illius Nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt Nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent Nodi recedere in tranſitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur in Quadraturis conſtituti perpetuo recedunt; in Syzygiis (ubi motus in Latitudinem nil perturbatur) quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius; adeoque, ſemper vel retrogradi vel ſtationarii, ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti Errores ſunt paulo majores in Conjunctione corporum *P*, *S* quam in eorum Oppoſitione, idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

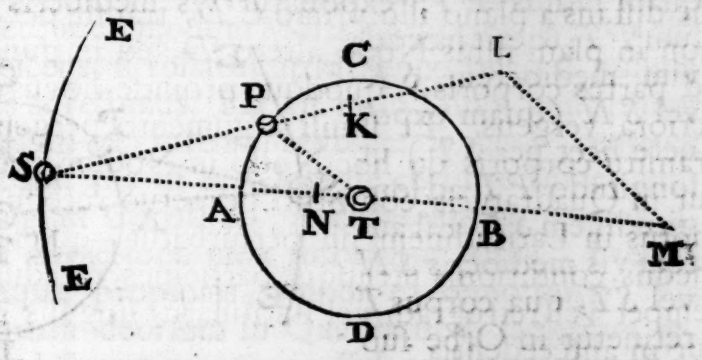
Corol. 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* Syſtema. Et ex aucto corpore *S* auctaque adeo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus diſtantiis) majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *S* circum Syſtema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PT*, tum corporis *S* vis abſoluta, ut *ST cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium de quibus actum eſt in præce-

dentibus

dentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante corporum T & P Systemate, & mutatis tantum distantia ST & vi absoluta corporis S, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis S & ratione triplicata inversa distantiæ ST. Unde si Systema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S, vires illæ NM, ML & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ NM, ML & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S e corpore T spectati, & vice versa. Namque hæ rationes eædem sunt atque ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium ESE & PAB forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum S & T vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est, vis corporis T qua corpus P de recto tramite in Orbitam PAB deflectere, & vis corporis S qua corpus idem P de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

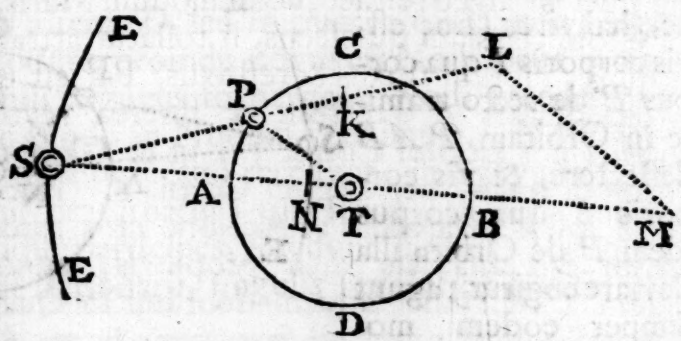


Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires NM, ML, cæteris stantibus, sunt ut Radius TP, & harum effectus periodici (per Corol. 2; Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P; & hinc errores angulares e centro T spectati (id est, tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in Longitudinem & Latitudinem errores apparentes) sunt, in qualibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revo-

De Motu Corporum

revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14, & in quolibet corporum T, P, S Syſtemate, ubi P circum T ſibi propinquum, & T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis T inverſe. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterque erit ut quadratum temporis periodici corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis T inverſe. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis PAB non mutantur motus Augis & Nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major ſit nunc minor quam radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum PT; & erit hæc ad vim mediocrem SK vel SN (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Eſt autem vis mediocris SN vel ST, qua corpus T retinetur in Orbe ſuo circum S, ad vim qua corpus P retinetur in Orbe ſuo circum T, in ratione compoſita ex ratione radii ST ad radium PT, & ratione duplicata temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S. Et ex æquo, vis mediocris LM, ad vim qua corpus P retinetur in Orbe ſuo circum T (quave corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad diſtantiam PT revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia PT, datur vis mediocris LM; & ea data, datur etiam vis MN quamproxime per analogiam linearum PT, MN.



Corol. 18. Iiſdem legibus quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari Annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; & ſingulæ Annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis P peragendo,

agendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis *S*, quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *S* vel *T*, quiescent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam Globum corporis *T*, ex materia non fluida constantem, ampliari & extendi usque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis *S* nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus *S*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad Syzygias; & vis *KL* trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad Quadraturas.

Corol. 20. Si Annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & refluendi; sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque Oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione

tione maximus decreſcentis inclinationis motus ſit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis, & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Globi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem Annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utcunque Globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu Nodorum innoteſcit conſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus ſit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod is axem ſuum axiſque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique, in eadem illa ſuperficiei parte qua prius, impulſu quocunque novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroque (per Legum Corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atque adeo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus abſque primo generaret; atque adeo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: Generabunt hi eundem motum circularem

cularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si Globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuo deſcribere. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Caſu (per Corol. 21) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

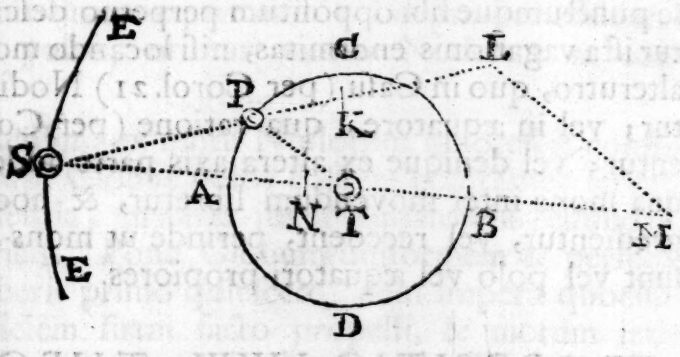
Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*

Nam corporis *S* attractiones verſus *T* & *P* componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *C*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato diſtantiæ *SC* magis eſt proportionalis reciproce, quam quadrato diſtantiæ *ST*: ut rem perpendenti facile conſtabit.

De Motu Corporum

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P *&* T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*



Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis noviſſimæ liquet centrum in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII collatum cum demonstratis in Propos. LXIV & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum à centro in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio ubi commune trium centrum quiescit, hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit & magis deinceps magisque agitatur.

Corol.

Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ deſcriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe, ſe mutuo trahant agitentque, & Orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus Orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In Syſtemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt Abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex Hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, ſunt (per motus Legem tertiam) ſibi invicem æqua-

les. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſolutam vim attractivam corporis *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum a trahente, quæve ſecundum Legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quod corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In Syſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, ſi minora circa maximum in Ellipſibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem Attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; ſive conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuo petentium, vel per Spiritus emiſſos ſe invicem agitantium, ſive is ab actione Ætheris, aut Aeris, Mediive cujuſcunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem Impulſus, non ſpecies virium

&

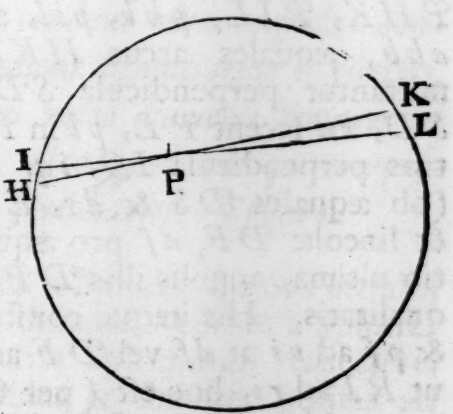
& qualitates Phyſicas, ſed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus Phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuo agere, & quales motus inde conſequantur.

SECTIO XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad Sphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.



Sit *HIKL* ſuperficies illa Sphærica, & *P* corpuſculum intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis *HP*, *LP* proportionales; & ſuperficiei Sphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æquali-

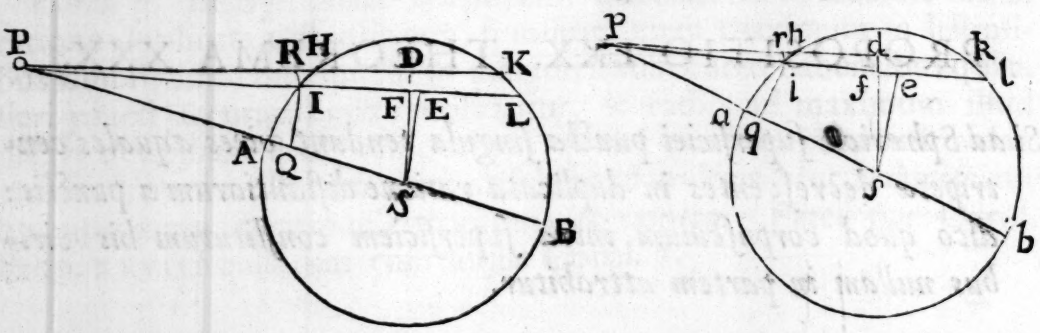
De Motu Corporum

æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $ahkb$ æquales duæ superficies Sphæricæ, centris S, s, diametris AB, ab descriptæ, & P, p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ



PHK, PIL, phk, pil, auferentes a circulis maximis AHB, ahb, æquales arcus HK, hk & IL, il: Et ad eas demittantur perpendicula SD, sd; SE, se; IR, ir; quorum SD, sd secent PL, pl in F & f: Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq. Evanescant anguli DPE, dpe: & (ob æquales DS & ds, ES & es,) lineæ PE, PF & pe, pf & lineolæ DF, df pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & pf ad pi ut df vel DF ad ri; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri, hoc est (per Corol. 3. Lem. VII,) ut arcus IH ad arcum ih. Rursus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut se vel SE ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus

arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus ih convolutione ſemicirculi akb circa diametrum ab deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p, ſunt (per Hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum a corporibus, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi p verſus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut ps *quad.* ad PS *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum KL, kl deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut ps *quad.* ad PS *quad.*; inque eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies Sphærica, capiendo ſemper sd æqualem SD & se æqualem SE, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum Sphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad Sphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, ac detur tum Sphæræ denſitas, tum ratio diametri Sphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus; dico quod vis qua corpuſculum attrahitur proportionalis erit ſemidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & diſtantias eorum a Sphærarum centris proportionales eſſe diametris Sphærarum reſpective, Sphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe.

verſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt, in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

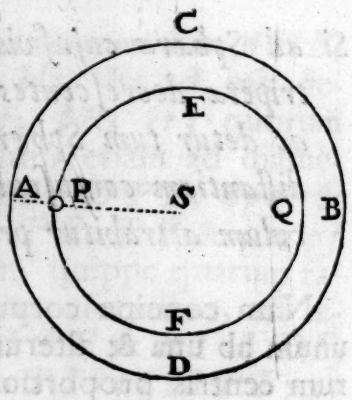
Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in Circulis, circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice verſa, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis ſimilium & æqualiter denſorum puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: vires quibus corpuſcula, ad Solida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra Sphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.



In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, per Prop. LXX, quod Sphæricæ ſuperficies concentricæ ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Prop. LXXII, hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure Mathematicæ, ſed Orbes adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar nihili

nihili ſit; nimirum Orbes evaneſcentes ex quibus Sphæra ultimo conſtat, ubi Orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per Puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur Sphæra in ſuperficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in Sphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones ſunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt, in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra Sphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem Sphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ſuæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV) & propterea

De Motu Corporum

terea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV) reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

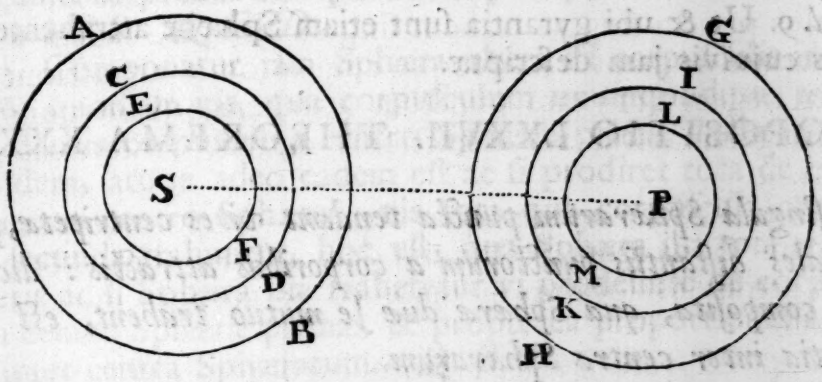
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares, & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Sunto Sphæræ quotcunque concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem

denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV) trahent Sphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis quas Sphæra tota ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunque creſcat vel decreſcat: &, ad-



dita materia non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

De Motu Corporum

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

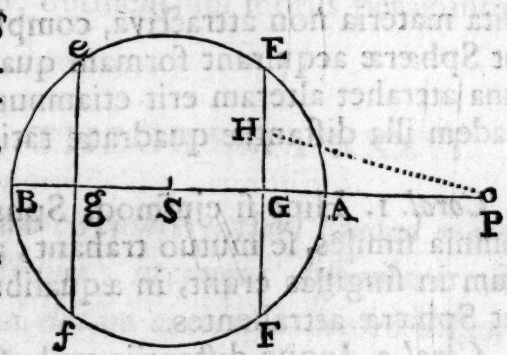
Corol. 7. Et vicissim, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.



Cas. 1. Sit *AEBF* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpusculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, *EF*, *ef* plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; *G*, *g* intersectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P*, secundum lineam *PH* exercita, est ut distantia *PH*; & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam *PG*, seu versus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc est plani totius vis, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut numerus punctorum ductus in distantiam *PG*: id est, ut contentum sub plano ipso *EF* & distantia illa *PG*. Et similiter vis plani *ef*, qua corpusculum *P* trahitur

trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg, sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG+Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS, hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS, vel ut summa æqualium planorum $EF+ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui S a corpusculo P. *Q. E. D.*

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS. *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris P; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

Cas. 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia pg; & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo & distantia pG; erit vis ex utraque composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc est, attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphæræ. *Q. E. D.*

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum pS. *Q. E. D.*

PRO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra Sphærarum.

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente, eodem modo quo Propoſitio LXXVI ex Propoſitione LXXV demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in Propoſitionibus X & LXIV de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum conditionis jam deſcriptæ, ſuntque corpora attracta Sphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

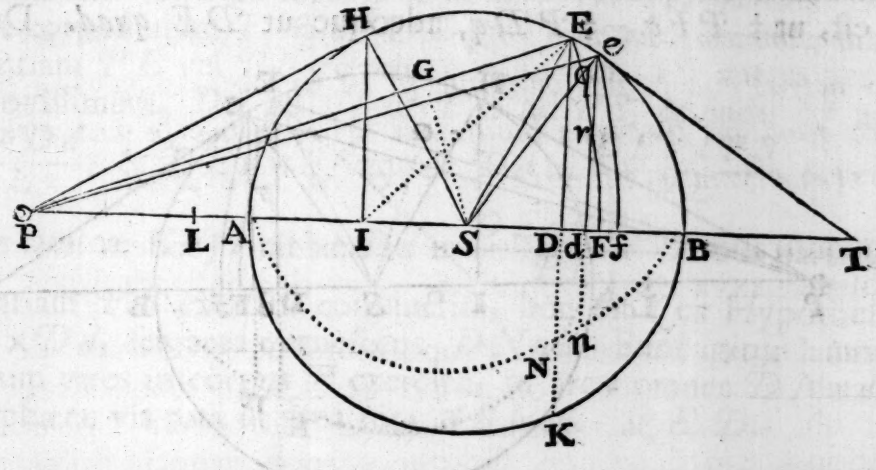
Attractionum Caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi Vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque Caſu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege, in receſſu a centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *ſecantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, ſi diſtantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam

Nam si linea Pe secet arcum EF in q; & recta Ee, quæ cum arcu evanescente Ee coincidit, producta occurrat rectæ PS in T; & ab S demittatur in PE normalis SG: ob similia triangula DTE, dTe, DES; erit Dd ad Ee, ut DT ad TE, seu DE ad



ES; & ob triangula Eeq, ESG (per Lem. VIII; & Corol. 3. Lem. VII) similia, erit Ee ad eq seu Ff, ut ES ad SG; & ex æquo, Dd ad Ff ut DE ad SG; hoc est (ob similia triangula PDE, PGS) ut PE ad PS. *Q. E. D.*

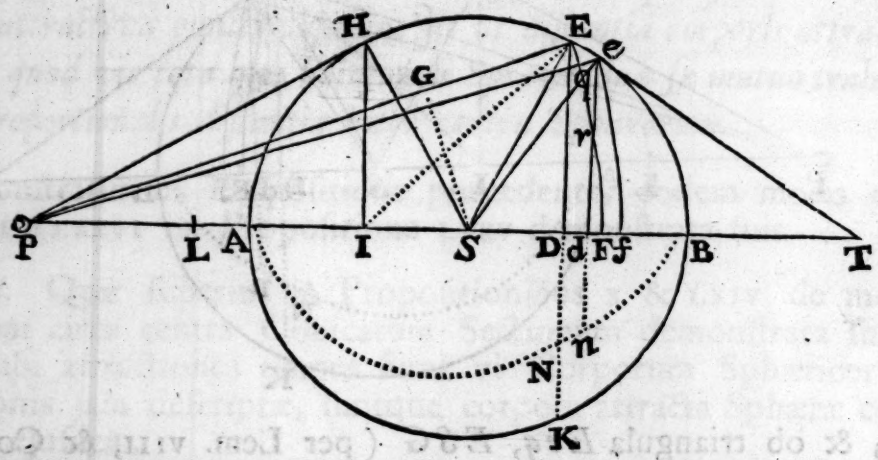
PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens EFfe, *convolutione sui circa axem* PS, *describat solidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione composita ex ratione solidi* DEq × Ff *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*

Nam si primo considerem vim superficiei Sphæricæ FE, quæ convolutione arcus FE generatur, & a linea de ubivis secatur in r; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd, manente Sphæræ radio PE, (uti demonstravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra & Cylindro*.) Et hujus vis secundum lineas PE vel Pr undique in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola Dd vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphæræ radio PE &

lineola

lineola illa $\mathcal{D}d$: at ſecundum lineam $\mathcal{P}S$ ad centrum S tendentem minor, in ratione $\mathcal{P}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{P}E$, adeoque ut $\mathcal{P}\mathcal{D} \times \mathcal{D}d$. Dividi jam intelligatur linea $\mathcal{D}F$ in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur $\mathcal{D}d$; & ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $\mathcal{P}\mathcal{D} \times \mathcal{D}d$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}Fq - \frac{1}{2}\mathcal{P}\mathcal{D}q$, adeoque ut $\mathcal{D}E$ *quad.* Ducatur



jam ſuperficies FE in altitudinem Ff; & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum $\mathcal{P}$ ut $\mathcal{D}Eq \times Ff$: puta ſi detur vis quam particula aliqua data Ff in diſtantia $\mathcal{P}F$ exercet in corpuſculum $\mathcal{P}$. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi $EFfe$ ut ſolidum $\mathcal{D}Eq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad Sphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *Sphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P *conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpuſculum* P *trahitur verſus Sphæram, eſt ut area comprehenſa ſub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpuſculum P eſt ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad diſtantiam PE vel PF exercita conjunctim. Eſt autem per Lemma noviſſimum, Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt, Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpuſculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

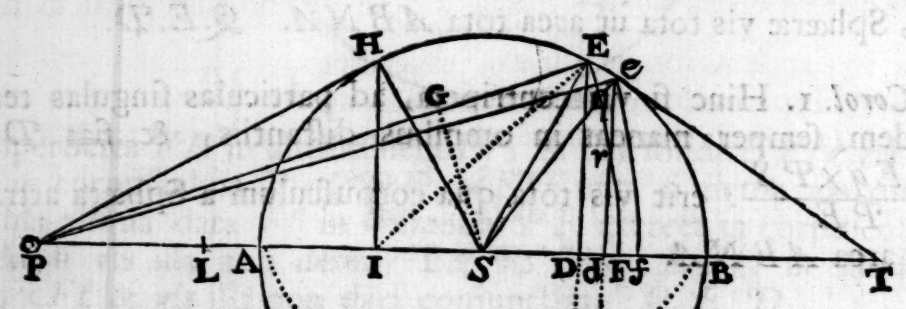
Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

De Motu Corporum

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est Area ABNA.

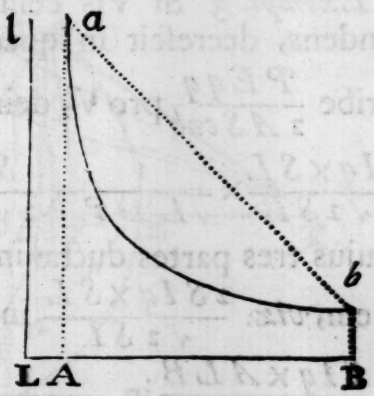
A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob similitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS+SI+2SD$, hoc est, sub PS & $2LS+2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro DE *quad* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq - LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$



(per Prop. 6, Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

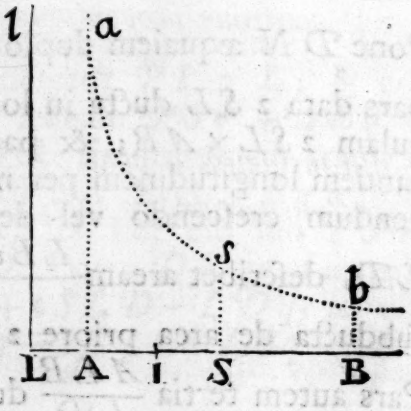
Ex-

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE, dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream Hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB, per puncta a, b deſcribatur Hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PEcub}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id eſt (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam;

bolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perque punctum s Aſymptotis Ll, LB deſcribatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area Hyperbolica $AasbB$ reliquet aream quæſitam $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad ſingulas Sphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis; ſcribe $\frac{PEqq}{2AScub}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LAcub}} - \frac{1}{\sqrt{LBcub}}$. Et hæ poſt debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2SIcub}{3LI}$. Hæ vero, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4SIcub}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpuſculum P in Sphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SIcub}{PI}$, id eſt, reciproce ut $PS\,cub \times PI$. *Q. E. I.*

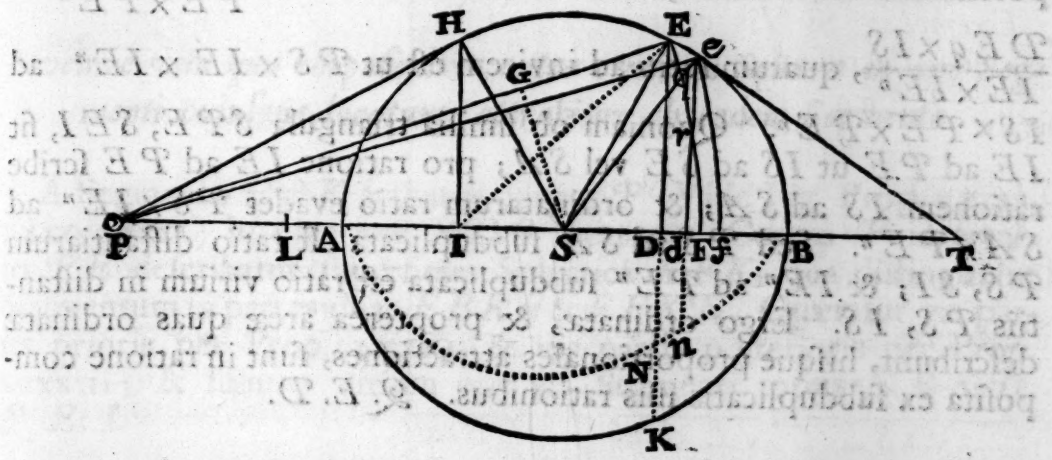
Eadem Methodo determinari poteſt Attractio corpuſculi ſiti intra Sphæram, ſed expeditius per Theorema ſequens.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In Sphæra centro S *intervallo* S A *descripta, si capiantur* S I, S A, S P *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* I S, P S *& subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione



composita ex subduplicata ratione distantiæ *S I* ad distantiam *S P* & ratione subduplicata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum *S I*, *S P* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *S P* ad Sphæræ semidiametrum *S A*: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invcem

cem ut SP *quad* ad SA *quad:* Si in quadruplicata, ut SP *cub* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut PS *cub* $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut SA *cub* $\times PI$, id est (ob datum SA *cub*) reciproce ut PI. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

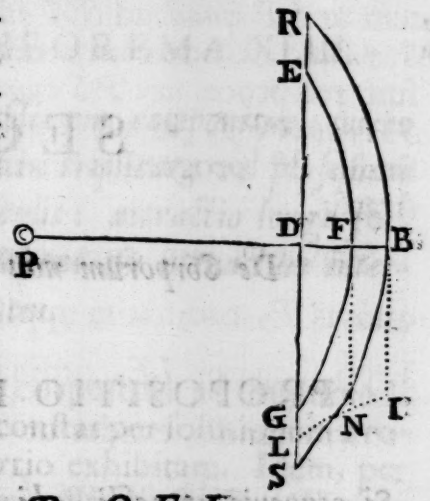
Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur IE, ordinata illa ad alium quemvis locum I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n subduplicata est ratio virium in distantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus Segmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus plano RDS & superficie Sphærica RBS contentum. Superficie Sphærica EFG centro P descripta secetur DB in F, ac distinguatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O,

tas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa cujus Index eſt n; & vis qua ſuperficies FE trahit corpus P erit ut $\frac{DF \times O}{PF^{n-1}}$. Huic proportionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea $BDLIB$, quam ordinatim applicata FN in longitudinem DB per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua Segmentum totum $RBSD$ trahit corpus P. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim qua corpuſculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.

A Segmento EBK trahatur corpus P (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI) in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE deſcribatur ſuperficies Sphærica EFK, qua diſtinguatur Segmentum in partes duas $EBKF$ & $EFKD$. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis Segmenti totius $EBKD$. *Q. E. I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus Philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO

SECTIO XIII.

De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus Figurarum omnium. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicata vel pluſquam triplicata ratione diſtantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI, in Exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter ſe collata, facile colligitur de attractionibus corporum verſus Orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra Orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materia æqualiter attractiva conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. *Q. E. D.*

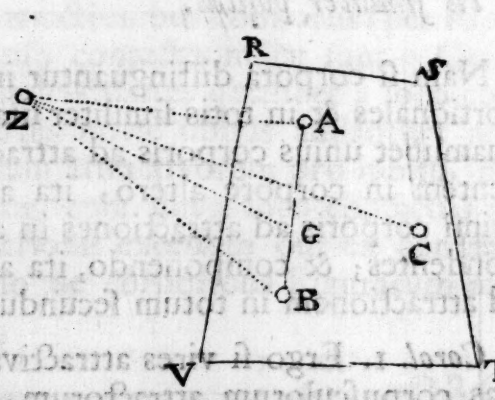
Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis

cujuſvis diſtantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & diſtantiarum dignitates illæ inverſe. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* adeoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,quad.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,quad.}$ id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,cub.}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,qq.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,qq.}$ id eſt, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directe vel inverſe in ratione aliqua diſtantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium Corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia conſimili & æquali conſtantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.



Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ in diſtantias ſuas *AZ*, *BZ* reſpective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa *A*×*AZ* & *B*×*BZ*. Jungatur *AB*, & ſecetur ea in *G* ut ſit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; &

& erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, Globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde orienda tendet ad commune centrum gravitatis Globi illius G & particulæ C; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit ac si Globus & particula C consisterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$ ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac si corpus attrahens $RSTV$ esset Sphæricum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si Corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

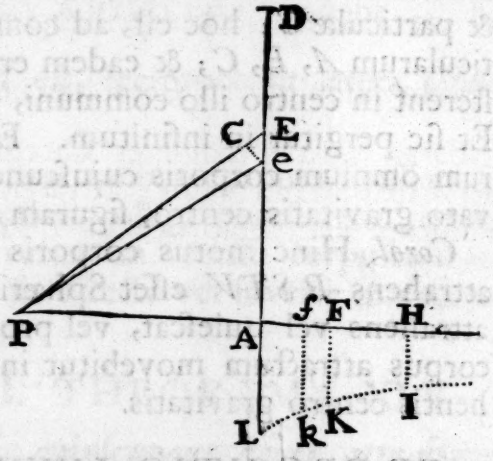
Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

De Motu Corporum

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula Circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis positum in recta quæ plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A intervallo quovis AD, in plano cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur Circulus; & invenienda sit vis qua corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta PE: In recta PA capiatur PF ipsi PE æqualis, & erigatur normalis FK, quæ sit ut vis qua punctum E trahit corpusculum P. Sitque IKL curva linea quam punctum K perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpusculi P attractio in Circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP. *Q. E. I.*



Etenim in AE capiatur linea quam minima Ee. Jungatur Pe, & in PE, PA capiantur PC, Pf ipsi Pe æquales. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut FK, & inde vis qua punctum illud trahit corpus P versus A est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus P versus A, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro A & intervallo

tervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*

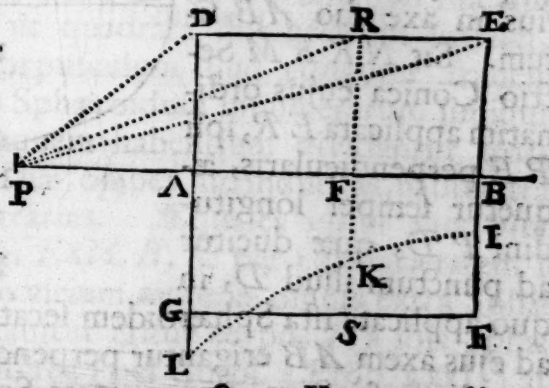
Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\,quad.}$, atque adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol 3. Et si diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrescentes.



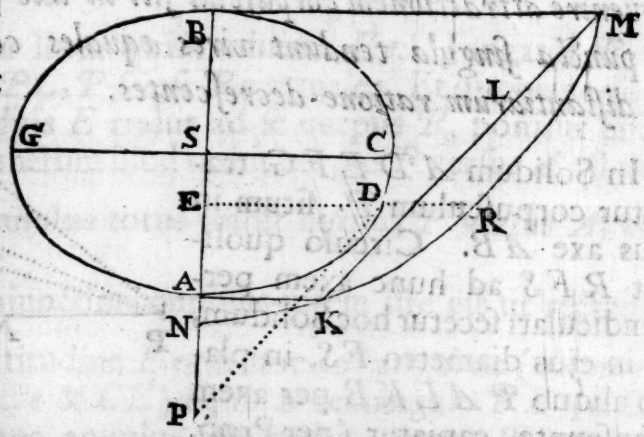
In Solidum $ADEFG$ trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc Solidum, & in ejus diametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per Prop. xc) longitudo FK vi qua corpusculum P in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpusculi P in Solidum ut area $LABI$. *Q. E. I.*

Corol.

Corol. 1. Unde si Solidum Cylindrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi P in hunc Cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. xc) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, describit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$ (id quod ex curvæ LIK quadratura facile ostendi potest:) & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum PB, PA differentiam AB describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$.



Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphæroidis $AGBCD$ attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit $NKRM$ Sectio Conica cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis



qua

qua Sphærois trahit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq + PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub}{3\ PS\ quad}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis. LIBER PRIMUS.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem, in data quavis ejusdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G: Sintque PCM, HLN superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus P & secet rectas DE & FG in B & C, posterior secet easdem rectas in H, I & K, L. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FP & CG, DH & IE, FK & LG sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ DE, PB & HI bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC & KL. Concipe jam DPF, EPG designare Conos oppositos, angulis verticalibus DPF, EPG infinite parvis descriptos, & lineas etiam DH, EI infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ $DHKF$, $GLIE$, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo P, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires Coni DPF & segmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P a sola Sphæroide intima $PCBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII) attractio ejus est ad vim, qua corpus A trahitur a Sphæroide tota $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS. *Q. E. D.*



PRO-

PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

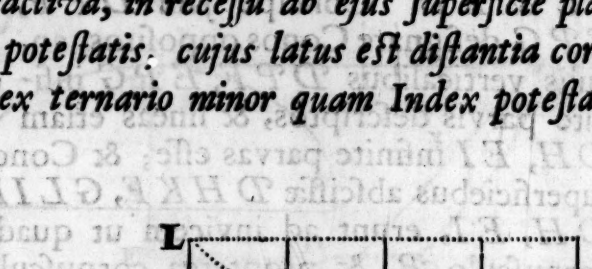
Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E Corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a Solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis: cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit *LGl* planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus *I*, inque plana innumera *mHM*, *nIN*, &c. ipsi *GL* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra Solidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC)



vis

vis qua planum quodvis mHM trahit punctum C est reciproce ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis singulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis Solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius est reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani lGL intra Solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG. Et Solidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C sola vi Solidi ultra planum OK siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-3}, hoc est (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si Solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NICO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. xxxix) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur Lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ reſolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem eſſe ſuppono. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata Parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata Hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^3$: adeoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed miſſis hujuſmodi Propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de Motu, quas nondum attigi.

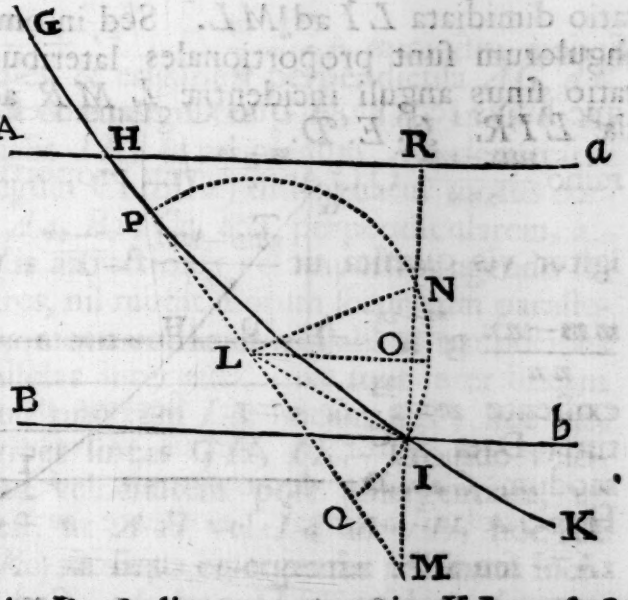
SECTIO

SECTIO XIV.

De Motu corporum minimorum, quæ Viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

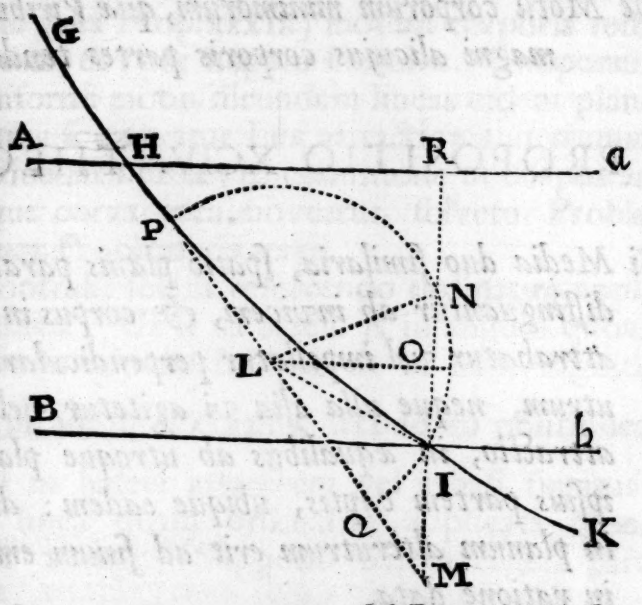
PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

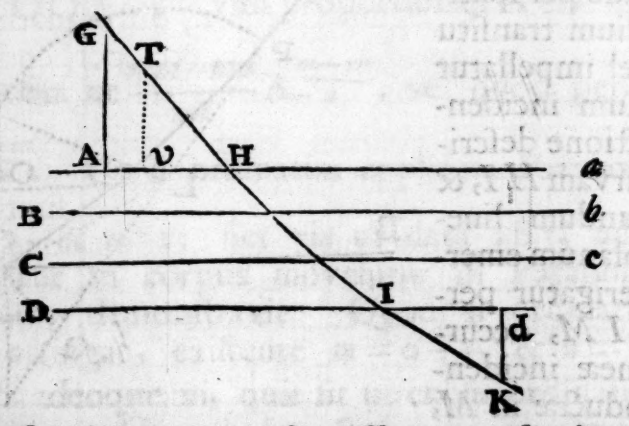
Si Media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.



Cas. 1. Sunto *A a*, *B b* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *A a* ſecundum lineam *G H*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus Medium incidentiæ, eaque actione deſcribat lineam curvam *H I*, & emergat ſecundum lineam *I K*. Ad planum emergentiæ *B b* erigatur perpendiculum *I M*, occurrens tum lineæ incidentiæ *G H* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *A a* in *R*; & linea emergentiæ *K I* producta occurrat *H M* in *L*. Centro *L* intervallo *L I* deſcribatur Circulus, ſecans

secans tam HM in P & Q, quam MI productam in N; & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) curva HI Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea IM æquale sit HM quadrato; sed & linea HM bisecabitur in L. Unde si ad MI demittatur perpendiculum LO, æquales erunt MQ, QR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN; estque rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM, hoc est, ad HMq, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ, id est, differentiæ quadratorum MLq, & PLq seu LIq; & HMq datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem MLq: ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad MLq, & divisim, ratio LIq ad MLq, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR ad sinum anguli emergentiæ LIR. *Q. E. D.*





Cas. 2. Tranfeat jam corpus fucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis

ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per Legum Corol. 2) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id eſt, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc eſt (reſpectu radii *TH* vel *IK*) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.*

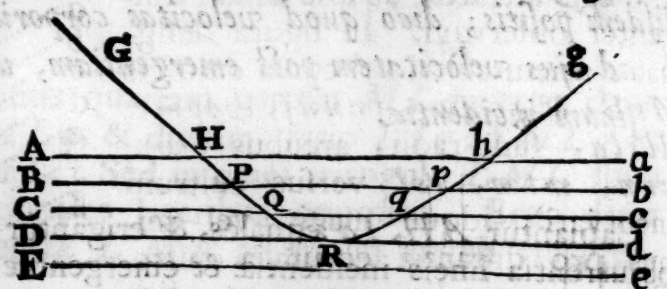
PRO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

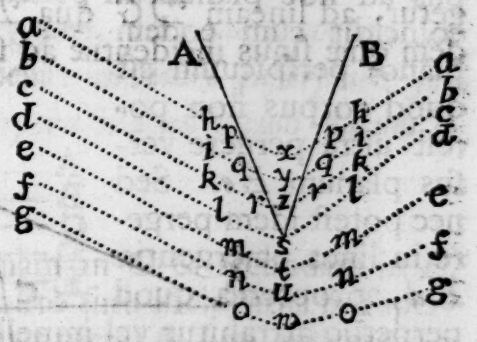
Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *Dd*, in spatium *DdeE*: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, describendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*



Scholium.

Scholium.

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam Sinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque Lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam conſtat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Obſervationibus diverſorum Aſtronomorum confirmata. Radii autem in aere exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus Opticos ſubjungere; interea de natura radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.



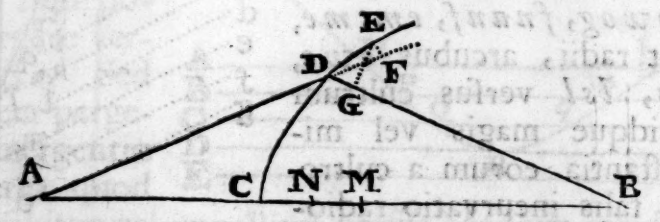
PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF* qua *AD* augetur, ad lineam *DG* qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio

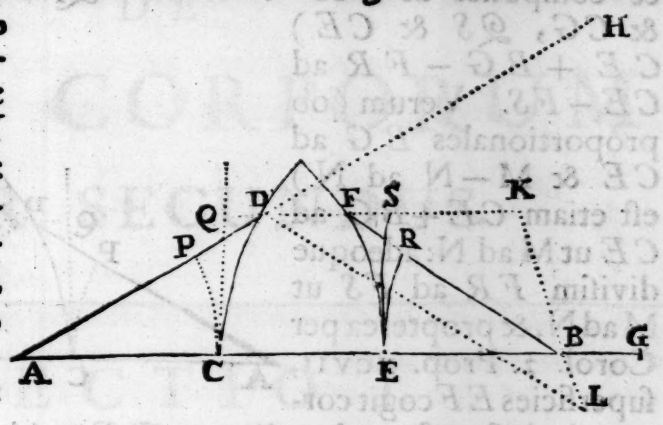


incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM*, ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data illa ratione; centrisque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*: punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in Optica & Geometria ad Refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hac propositione exponere.

Corol.

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur Lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atq; adeo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

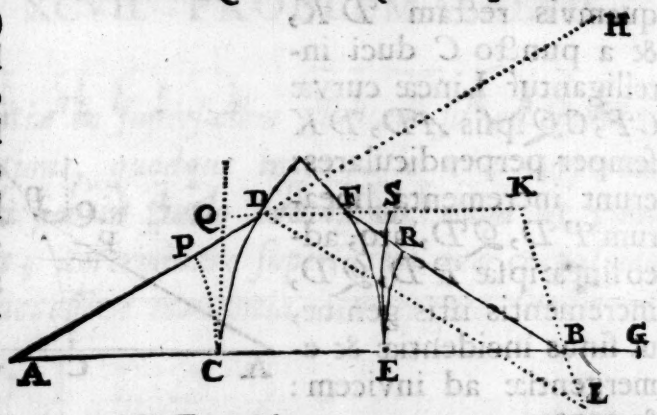
Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcripta ſuperficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*, puncto *D* utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eadem, & ſinu emergentiæ e ſuperficie ſecunda ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum *AB* ad *G* ut ſit *BG* ad *CE* ut M—N ad N, tum *AD* ad *H* ut ſit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut ſit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* deſcribe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipſique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget Lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. *Q. E. F.*

Nam concipe Lineas *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DF* reſpective, & Lineas *ER*, *ES* ipſis *FB*, *FD* ubique perpendiculares eſſe, adeoque *QS* ipſi *CE* ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII) *PD* ad *QD* ut M ad N, adeoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*;

De Motu Corporum

& divisim ut $DL-FB$ seu $PH-PD-FB$ ad FD seu $FQ-QD$; & compositè ut $PH-FB$ ad FQ, id est (ob æquales PH & CG, QS & CE) $CE+BG-FR$ ad $CE-FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & $M-N$ ad N) est etiam $CE+BG$ ad CE ut M ad N: adeoque divisim FR ad FS ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII, superficies EF cogit corpus, in ipsam secundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B. *Q. E. D.*



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maximè accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphæricè figuratis & Aquam inter se claudentibus constientur; fieri potest ut à refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quo minus Optica per Figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De Motu Corporum quibus reſiſtitur in ratione Velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAm cum motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. *Q.E.D.*

Corol. Igitur ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ſpatiis liberis ſola vi inſita moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.

Sit A ad A − B ut B ad B − C & C ad C − D, &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q.E.D.*

De Motu Corporum

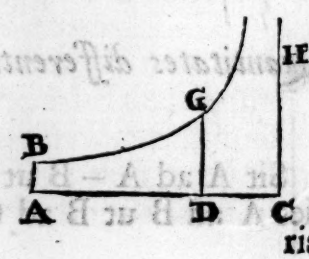
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si Corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per Medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione Geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. 1. Lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. 1. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis *ADC*, *CH* describatur Hyperbola *BG*, sintque *AB*, *DG* ad Asymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium eo tempore descriptum per lineam *AD*. Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum tempo-

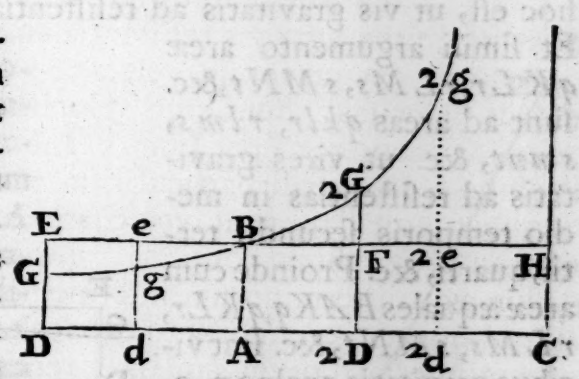


ris,

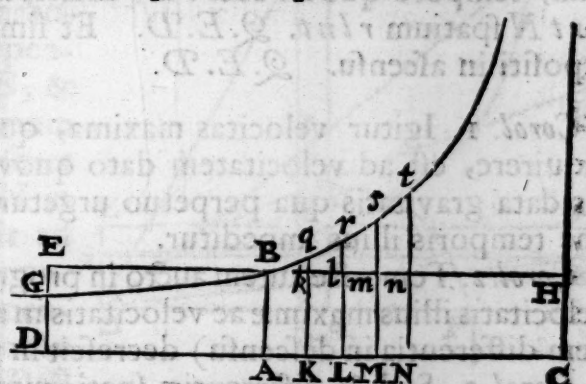
ris, decreſcet recta $\mathcal{D}C$ in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ AC æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eadem ratione.

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.



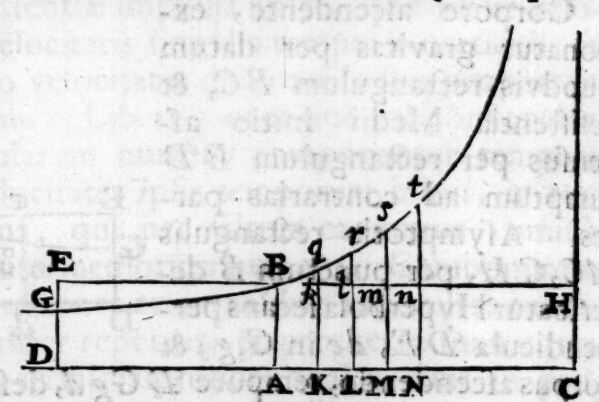
Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BC, & reſiſtentia Medii initio aſcenſus per rectangulum $B\mathcal{D}$ ſumptum ad contrarias partes. Aſymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula $\mathcal{D}E, de$ in G, g; & corpus aſcendendo, tempore $\mathcal{D}Ggd$, deſcribet ſpatium $EGge$, tempore $\mathcal{D}GBA$ ſpatium aſcenſus totius EGB; tempore $AB2G2\mathcal{D}$ ſpatium deſcenſus $BF2G$, atque tempore $2\mathcal{D}2G2g2d$ ſpatium deſcenſus $2GF2e2g$: & velocitates corporis (reſiſtentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABE\mathcal{D}$, $ABed$, nulla, $ABF2\mathcal{D}$, $AB2e2d$ reſpective; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BC.



Reſolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atque adeo (per Hypotheſin) ut reſiſtentiæ Medii principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravitatis

De Motu Corporum

tatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $NnHC$, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque adeo (per motus Legem II) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II) in progreſſione Geometrica. Quare ſi rectæ Kk, Ll, Mm, Nn, &c. productæ occurrant Hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. æquales, adeoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area $ABqK$ (per Corol. 3. Lem. VII, & Lem. VIII, Lib. I) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ ſeu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ Bkq, $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per Hypotheſin) velocitatibus, atque adeo deſcriptis ſpatiis analogæ. Componantur analogarum ſummæ, & erunt areæ Bkq, Blr, Bms, Bnt, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis $ABrL$, deſcribit ſpatium Blr, & tempore $LrtN$ ſpatium $rlnt$. *Q.E.D.* Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q.E.D.*



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim reſiſtentiæ qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione Arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu (atque etiam earundem differentia in deſcenſu) decreſcit in progreſſione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione Geometrica.

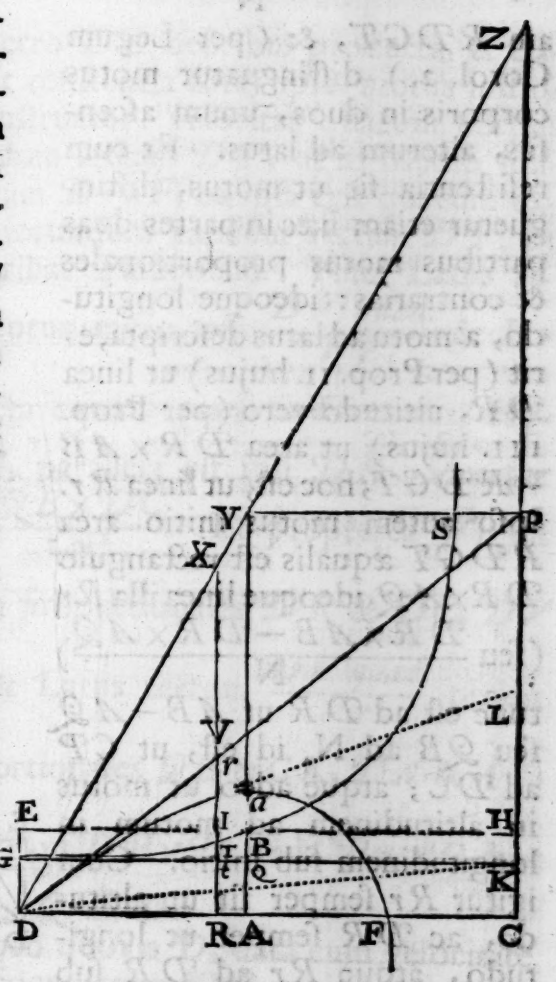
Corol.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

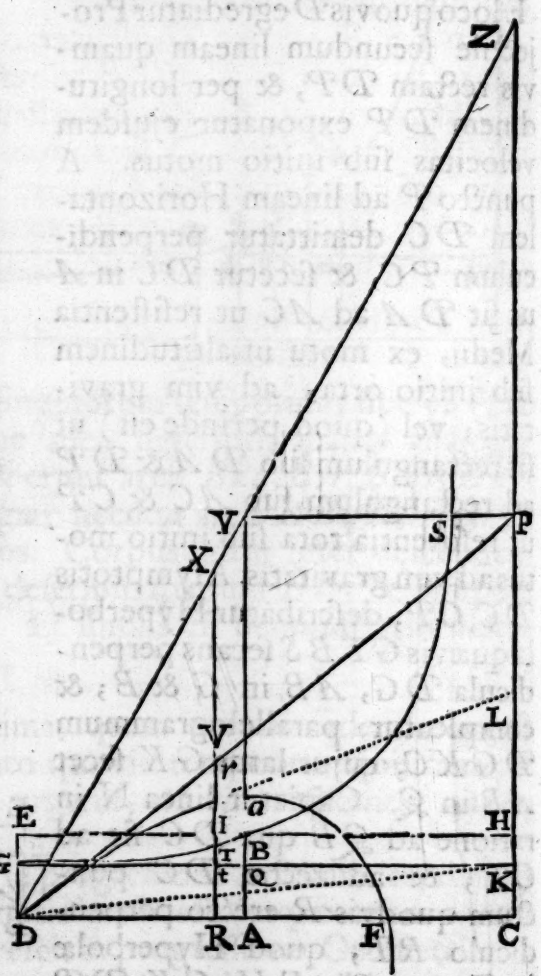
E loco quovis D egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto P ad lineam Horizontalem DC demittatur perpendiculum PC, & secetur DC in A ut sit DA ad AC ut resistentia Medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub DA & DP ad rectangulum sub AC & CP ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis DC, CP, describatur Hyperbola quævis $GTBS$ secans perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$, cujus latus GK secet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB qua DC sit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod Hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde



De Motu Corporum

inde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & Projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, describens curvam lineam $DraF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad Asymptoton PLC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL. *Q. E. I.*

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, adeoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. 11. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per Prop. 111. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr. Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*



Corol.

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB}{N} - \frac{R\mathcal{D}GT}{N}$, ideoque ſi producatur RT ad X ut ſit RX æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB}{N}$, (id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $AC\mathcal{P}\mathcal{T}$, jungatur $\mathcal{D}\mathcal{T}$ ſecans $C\mathcal{P}$ in Z, & producatur RT donec occurrat $\mathcal{D}\mathcal{T}$ in X;) erit Xr æqualis $\frac{R\mathcal{D}GT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ CR vel, quod perinde eſt, innumeræ ZX, in progreſſione Geometrica; erunt totidem Xr in progreſſione Arithmetica. Et hinc Curva $\mathcal{D}raF$ per tabulam Logarithmorum facile delineatur.

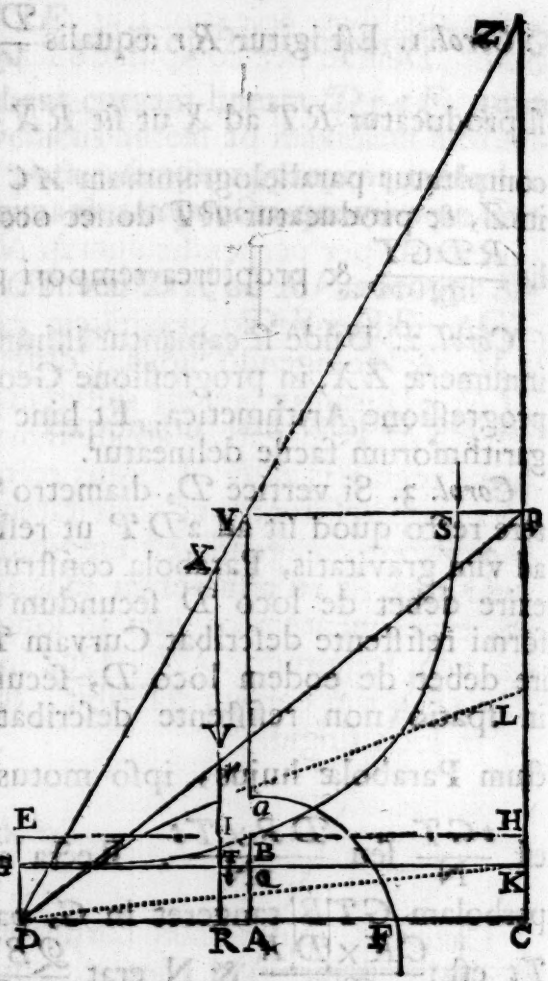
Corol. 3. Si vertice $\mathcal{D}$, diametro $\mathcal{D}E$ deorſum producta, & Latere recto quod ſit ad $2\mathcal{D}\mathcal{P}$ ut reſiſtentia tota, ipſo motus initio, ad vim gravitatis, Parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco $\mathcal{D}$ ſecundum rectam $\mathcal{D}\mathcal{P}$, ut in Medio uniformi reſiſtente deſcribat Curvam $\mathcal{D}raF$, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco $\mathcal{D}$, ſecundum eandem rectam $\mathcal{D}\mathcal{P}$, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{\mathcal{D}V\ quad.}{Vr}$ & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{\mathcal{D}R \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, Hyperbolam GTB tangeret in G, parallela eſt ipſi $\mathcal{D}K$, ideoque Tt eſt $\frac{CK \times \mathcal{D}R}{\mathcal{D}C}$ & N erat $\frac{\mathcal{Q}B \times \mathcal{D}C}{C\mathcal{P}}$. Et propterea Vr eſt $\frac{\mathcal{D}Rq \times CK \times C\mathcal{P}}{2\mathcal{D}Cq \times \mathcal{Q}B}$, id eſt, (ob proportionales $\mathcal{D}R$ & $\mathcal{D}C$, $\mathcal{D}V$ & $\mathcal{D}\mathcal{P}$) $\frac{\mathcal{D}Vq \times CK \times C\mathcal{P}}{2\mathcal{D}\mathcal{P}q \times \mathcal{Q}B}$, & Latus rectum $\frac{\mathcal{D}V\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2\mathcal{D}\mathcal{P}q \times \mathcal{Q}B}{CK \times C\mathcal{P}}$, id eſt (ob proportionales $\mathcal{Q}B$ & CK, $\mathcal{D}A$ & AC) $\frac{2\mathcal{D}\mathcal{P}q \times \mathcal{D}A}{AC \times C\mathcal{P}}$, adeoque ad $2\mathcal{D}\mathcal{P}$, ut $\mathcal{D}\mathcal{P} \times \mathcal{D}A$ ad $C\mathcal{P} \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis $\mathcal{D}$, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam $\mathcal{D}\mathcal{P}$ projiciatur; & reſiſtentia Medii ipſo motus initio detur: inveniri poteſt Curva $\mathcal{D}raF$, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate

De Motu Corporum

datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2DP$ ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur DP. Dein secando DC in A, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva $DraF$.

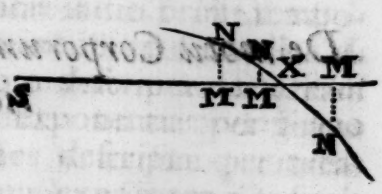
Corol. 5. Et contra, si datur Curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis r. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.



Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; & ex aucta velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, adeoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex Phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, $cD\rho$ (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, assumpta quacunque longitudine pro DP vel $D\rho$, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione

tione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*. Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta *DP*, inveniantur longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ *SM*, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo *DF* per calculum, & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem *DP*, ut longitudo *DF* per experimentum cognita ad longitudinem *DF* modo inventam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum Curva linea *DraF* quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.



Scholium.

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant resistentiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus Legem II & III) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

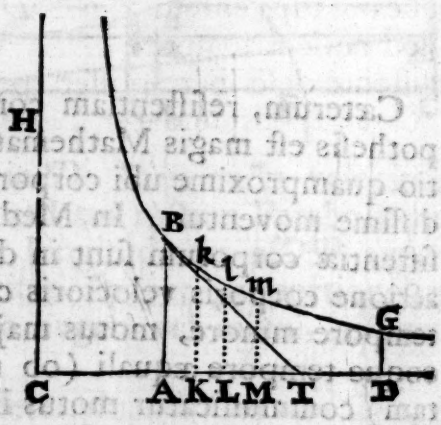
De Motu Corporum

SECTIO II.

De motu Corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione Velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si Corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita per Medium ſimilare movetur; tempora vero ſumantur in progreſſione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eadem progreſſione Geometrica inverſe, & quod ſpatia ſunt æqualia quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.



Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia Medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in recta CD ſumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. Hyperbolæ $Bklm G$, centro C Aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & diviſim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & viciſſim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et ſimili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut Kkq, Llq, &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm qua-

quadrata ſunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore deſcripta per aream $AKkB$; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes Ll, Mm, &c. & longitudines deſcriptæ per areas Kl, Lm, &c. Et compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione Geometrica; & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progreſſione eadem inverſa, atque ſpatia deſcripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per Aſymptoti partem quamvis $A\mathcal{D}$, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam $\mathcal{D}G$, & ſpatium totum deſcriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $AB G\mathcal{D}$; necnon ſpatium quod corpus aliquod eodem tempore $A\mathcal{D}$, velocitate prima AB, in Medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum $AB \times A\mathcal{D}$.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in Medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area Hyperbolica $AB G\mathcal{D}$ ad rectangulum $AB \times A\mathcal{D}$.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia Medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore AC, in Medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat Hyperbolam in B, & occurrat Aſymptoto in T; recta AT æqualis erit ipſi AC, & tempus exponet quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam AB.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceverſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus AC, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis AB: & inde

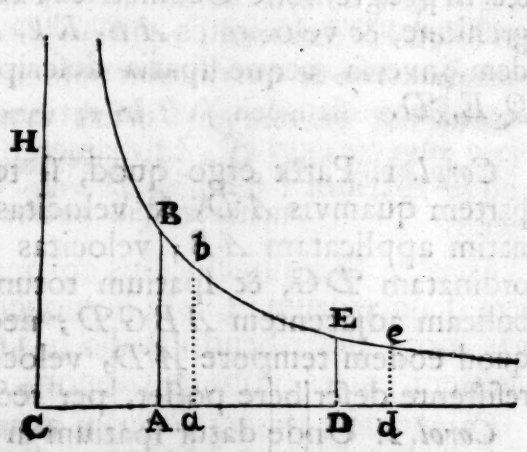
De Motu Corporum

de datur punctum *B* per quod Hyperbola, Asymptotis *CH*, *CD*, describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descripta Hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo



areæ *ABba*, *DEed*, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam suis amissis *AB*−*ab*, *DE*−*de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora Sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora con-

conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicata ratione diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſque erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt, ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoque ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus Globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus Globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi Globi non ſint homogenei, ſpatium a Globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc Propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol.

Corol. 5. Et ſi Globi moveantur in Mediis diverſis; ſpatium in Medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc Propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum Genitæ æquatur Momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque, in Arithmetica per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, abſque additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt Facti, Quoti, Radices, Rectangula, Quadrata, Cubi, Latera quadrata, Latera cubica, & ſimiles. Has quantitates ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine Momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis Coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum digni-

dignitatum A^1, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$ respective. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, seu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ seu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. *Q.E.D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC+cG$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. *Q.E.D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1}. *Q.E.D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n

una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit *a*, per Cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} seu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, adeoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale *b*, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunque A^mB^n momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque sive dignitatum indices *m* & *n* sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A, -B, D, 2E, 3F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus

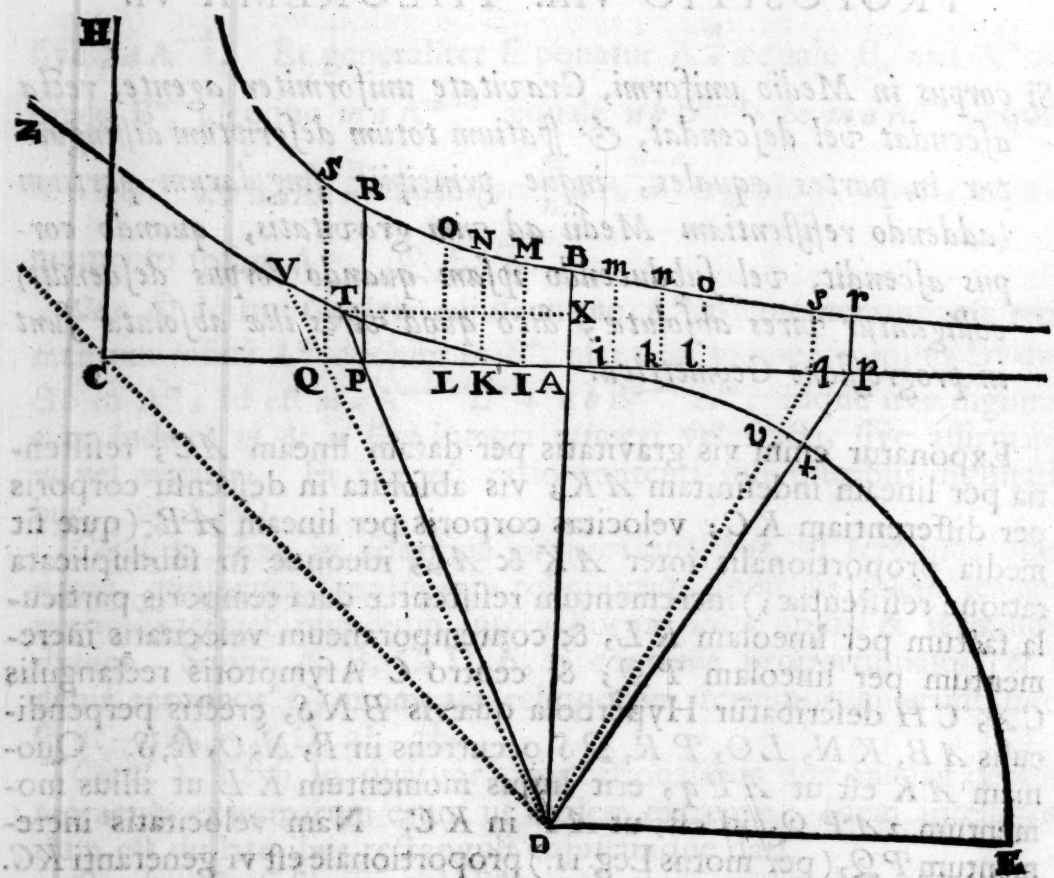
tibus [*Data Æquatione quotcunque Fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versa*] eandem celarem: reſcripſit Vir Clariſſimus ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis, & Idea generationis quantitatum. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) colligantur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione Geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; reſiſtentia per lineam indefinitam AK; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ ſit media proportionalis inter AK & AC, ideoque in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ;) incrementum reſiſtentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Aſymptotis rectangulis CA, CH deſcribatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK eſt ut APq, erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id eſt, ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, (per motus Leg. 11.) proportionale eſt vi generanti KC. Componatur ratio ipſius KL cum ratione ipſius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ Hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, eſt æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evaneſcens eſt ut AP. Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſta deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. & vi-

res absolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progressione Geometrica. *Q. E. D.* Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas $ABmi$, $imnk$, $knol$, &c. constabit quod vires absolutæ AC, iC, kC, lC, &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ lC, kC, iC, AC, IC, KC, LC, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam $ABNK$; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas AC, AP & AK respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea AC.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem

tatem illam datam in ſubduplicata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii reſiſtentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi Tangentes angulorum ſectoris Circularis & ſectoris Hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcenſus futuri ut ſector Circuli, & tempus omne deſcenſus præteriti ut ſector Hyperbolæ.

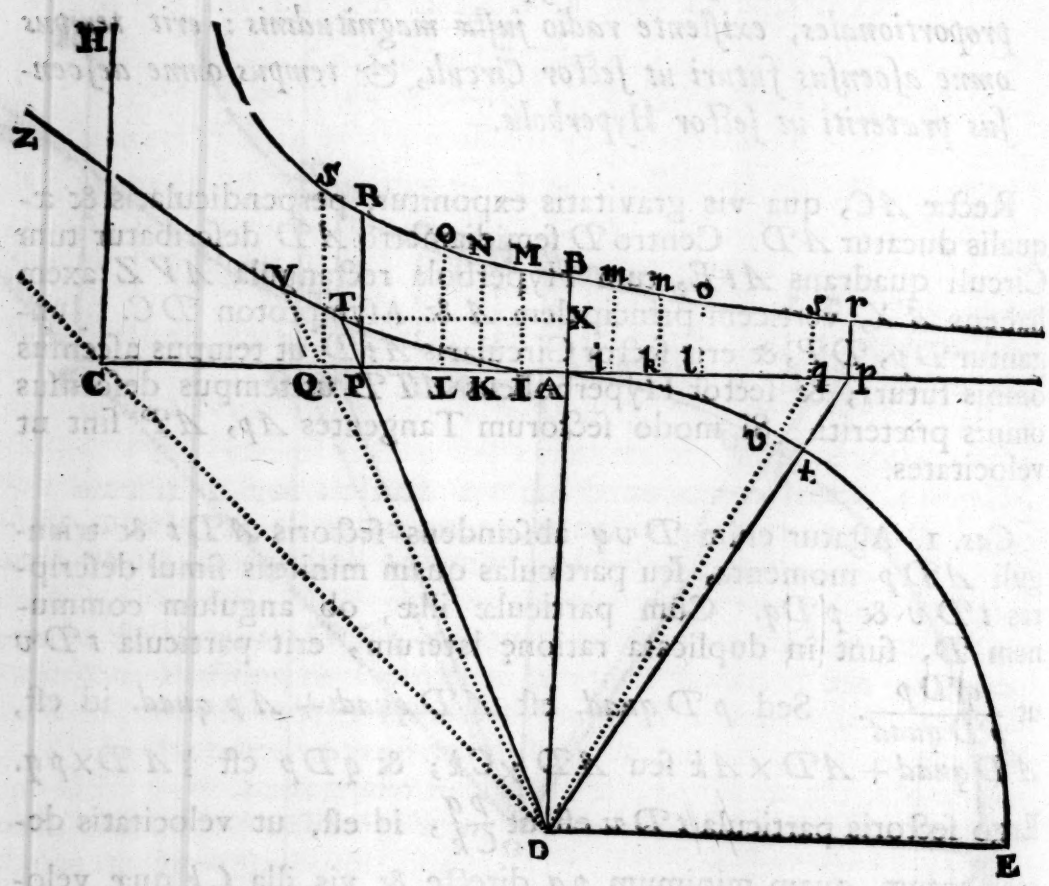
Rectæ AC, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur $A\mathcal{D}$. Centro $\mathcal{D}$ ſemidiametro $A\mathcal{D}$ deſcribatur tum Circuli quadrans $At E$, tum Hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A & Aſymptoton $\mathcal{D}C$. Jungantur $\mathcal{D}p$, $\mathcal{D}P$, & erit ſector Circularis $At\mathcal{D}$ ut tempus aſcenſus omnis futuri; & ſector Hyperbolicus $AT\mathcal{D}$ ut tempus deſcenſus omnis præteriti. Si modo ſectorum Tangentes Ap, AP ſint ut velocitates.

Cas. 1. Agatur enim $\mathcal{D}vq$ abſcindens ſectoris $A\mathcal{D}t$ & trianguli $A\mathcal{D}p$ momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas $t\mathcal{D}v$ & $p\mathcal{D}q$. Cum particulæ illæ, ob angulum communem $\mathcal{D}$, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula $t\mathcal{D}v$ ut $\frac{q\mathcal{D}p}{p\mathcal{D}\,quad.}$. Sed $p\mathcal{D}\,quad.$ eſt $A\mathcal{D}\,quad. + Ap\,quad.$ id eſt, $A\mathcal{D}\,quad. + A\mathcal{D} \times Ak$ ſeu $A\mathcal{D} \times Ck$; & $q\mathcal{D}p$ eſt $\frac{1}{2}A\mathcal{D} \times pq$. Ergo ſectoris particula $t\mathcal{D}v$ eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverſe, atque adeo ut particula temporis decremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium $t\mathcal{D}v$ in ſectore $A\mathcal{D}t$, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus $A\mathcal{D}t$ eſt ut aſcenſus totius futuri tempus. *Q. E. D.*

Cas.

De Motu Corporum

Cas. 2. Agatur DQV abscindens tum sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & $PDQq$; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq. ad DPq. id est (si TX & AP parallelæ sint) ut DXq. ad DAq. vel TXq. ad APq. & divisim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. Sed ex natura Hyperbolæ $DXq - TXq$ est ADq, & per Hypothesin APq est $AD \times AK$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut ADq ad



$ADq - AD \times AK$; id est, ut AD ad $AD - AK$ seu AC ad CK: ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQq \times AC}{CK}$, atque adeo ob datas AC & $\frac{\rho\delta}{AD}$, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directe utque vis generans incrementum inverse, atque adeo ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ

PQ

PQ generantur, ut ſumma particularum ſectoris ATD, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maxima AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area $ABNK$, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD qua tempus exponitur. Nam cum ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per Corol. 1, Lem. 11 hujus) LK ad PQ ut $2AK$ ad AP, hoc eſt, ut $2AP$ ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}PQ$ ut AP ad ($\frac{1}{4}AC$ vel) AB; eſt & KN ad (AC vel) AD ut AB ad CK; itaque ex æquo LKN ad DPQ ut AP ad CK. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rurſus ex æquo LKN eſt ad DTV ut AP ad AC; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta LKN & DTV ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ $ABNK$ & ATD ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q.E.D.*

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore deſcriptum, ut eſt area $ABnk$ ad ſectorem ADt.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum APD ad ſectorem Hyperbolicum ATD. Nam velocitas in Medio non reſiſtente foret ut tempus ATD, & in Medio reſiſtente eſt ut AP, id eſt, ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum ApD ad ſectorem Circularem AtD; ſive ut recta Ap ad arcum At.

Corol. 5. Eſt igitur tempus quo corpus in Medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector ADT ad triangulum ADC: & tempus, quo velocitatem Ap in Medio

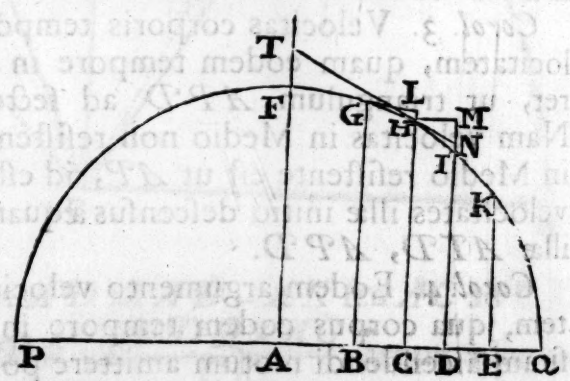
Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus At ad ejus tangentem Ap.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2, & 3, Theor. VI, Lib. II; indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem ADT vel ADt ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas AP vel Ap, tum area $ABNK$ vel $ABnk$, quæ est ad sectorem ADT vel ADt ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter describi potest.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio $ABnk$ vel $ABNK$, dabitur tempus ADt vel ADT.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitque resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas & Medii resistentia in locis singulis.



Sit PQ planum illud plano Schematis perpendiculare; $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hac curva ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E insistentes; & sint BC, CD, DE distantiæ Ordinatarum inter se æquales. A punctis G & H ducantur rectæ GL, HN curvam tangentes in G & H, & Ordinatis CH, DI sursum productis occurrentes in L & N, & compleatur parallelogrammum $HCDM$.

Et

Et tempora quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicata ratione altitudinum LH, NI quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directe & tempora inverſe. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a reſiſtentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem qua duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet (ut *Galilæus* demonſtravit) id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſola longitudine $HI - HN$ ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$, Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, $C\mathcal{D}$, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$. Pro Ordinata CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt NI, & Ordinatæ $\mathcal{D}I$, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c, $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c, & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpective. Et quadrando differentias Ordinatarum $BG - CH$ & $CH - \mathcal{D}I$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, $C\mathcal{D}$, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c, & $oo + QQoo + 2QRo +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, &

$o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI. Præterea si ab Ordinata CH subducatur semisumma Ordinatarum BG ac DI, & ab Ordinata DI subducatur semisumma Ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo+3So^3$. Et hæ sunt lineolis LH & NI proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$: & $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ Et cum $2NI$ sit $2Roo$, Resistentia jam erit ad Gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id est, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea est quacum corpus de loco quovis H, secundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii densitas est ut resistentia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q.E.I.*

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat Ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, adeoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Qua ratione Resistentia erit ad Gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, Velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & Medii densitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

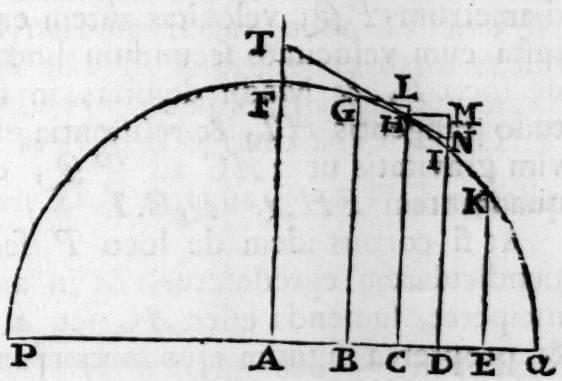
Corol. 2. Et hinc, si Curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam AC & ordinatim applicatam CH,

CH, (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur, ut in exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea $PFHQ$ Semicirculus super diametro PQ descriptus, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bisecetur diameter PQ in A, dic AQ n, AC a, CH e, & CD o: & erit DIq seu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, seu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum nostram extracta, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hic scribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annno^3}{2e^5} -$ &c.

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; secundum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus qui hic est e, denotabit semper longitudinem Ordinatæ CH insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o; secundus terminus qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam



inter CH & DN, id est, lineolam MN quæ abscinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, atque adeo positionem tangentis HN semper determinat: ut in hoc casu capiendo MN ad HM ut est $\frac{ao}{e}$ ad o, seu a ad e. Terminus tertius qui hic est $\frac{nnoo}{2e^3}$ designabit lineolam IN quæ jacet inter tangentem & curvam, adeoque determinat angulum contactus IHN seu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum,

termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum Scrierum in ſolutione Problematum quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annno^3}{2e^5}-$ &c, cum ſerie $P-Qo-Roo-So^3-$ &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur $e, \frac{a}{e}, \frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit Medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt, (ob datam n,) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa HT quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad Circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſta cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & Medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud deſcribet Circuli quadrantem FHQ. Q.E.I.

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a P deſcribat Circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $PFHQ$ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in ipſa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale eſt rectangulo ſub ordinata DI & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur recta

recta illa b, PQ a, PQ c, CH e & CD o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo b in DI, adeoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q.E.I.*

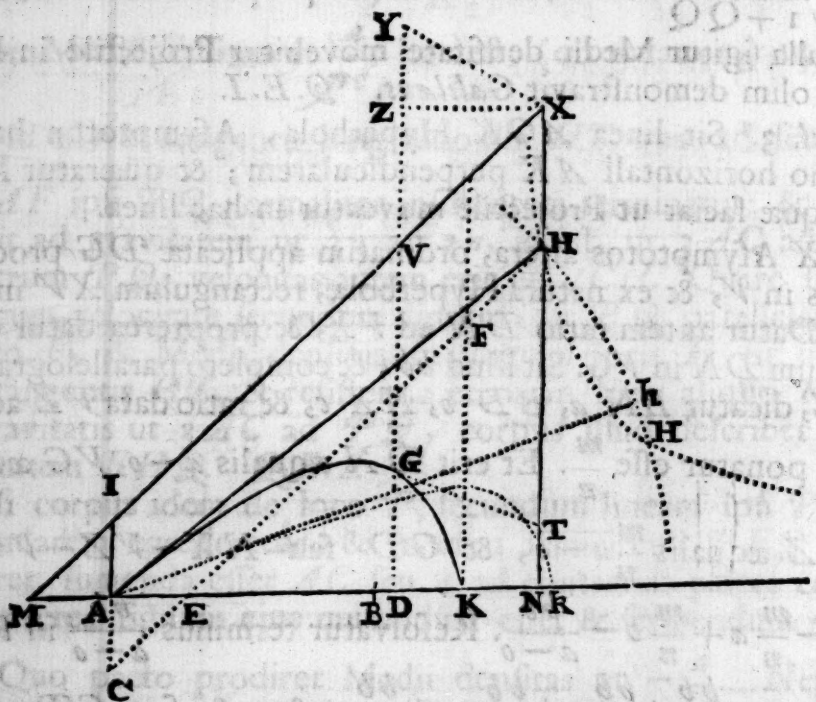
Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo $DNXZ$, dicatur BN a, BD o, NX c, & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Qo, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in Regula superiore, pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas

ut

De Motu Corporum

ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id est, si in VZ sumatur $V\Upsilon$ æqualis VG, ut $\frac{1}{X\Upsilon}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & $Z\Upsilon$ quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3X\Upsilon$ ad



$2\Upsilon G$ & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{X\Upsilon quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod Medii densitates in locis singulis G sint reciproce ut distantiæ $X\Upsilon$, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3X\Upsilon$ ad $2\Upsilon G$; & corpus de loco A, justa cum velocitate emissum, describet Hyperbolam illam AGK. *Q.E.I.*

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola sit, centro X Asymptotis MX, NX ea lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet Hyperbolam in G & Asymp-

Aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipſius ZX vel $\mathcal{D}N$ dignitas aliqua $\mathcal{D}N^n$, cujus index eſt numerus n: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, $B\mathcal{D}$, NX ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad XZ vel $\mathcal{D}N$ ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{\mathcal{D}N^n}$, & erit $\mathcal{D}N$ æqualis $A-O$, $VG=\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ=\frac{d}{e}\overline{A-O}$, & $G\mathcal{D}$ ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet $G\mathcal{D}$ æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoque ſi in VZ capiatur $V\Upsilon$ æqualis $n\times VG$, denſitas illa eſt reciproce ut $X\Upsilon$. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipſarum XZ & $Z\Upsilon$ quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{X\Upsilon}{A}$ ad $4RR$, id eſt, $X\Upsilon$ ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum $G\mathcal{D}$ & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2X\Upsilon quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q.E.I.*

Scholium

Scholium.

Eadem ratione qua prodiit denſitas Medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n prodibit denſitas Medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}^{n-1}$.

Et propterea ſi Curva inveniri poteſt ea lege ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}^{n-1}$: corpus movebitur in hac Curva in uniformi Medio cum reſiſtentia quæ ſit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad Curvas ſimpliciores.

Quoniam motus non fit in Parabola niſi in Medio non reſiſtente, in Hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod Linea, quam projectile in Medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad Hyperbolas haſce quam ad Parabolam. Eſt utique linea illa Hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab Aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XTGT$, & recta GT tanget Hyperbolam in G, ideoque denſitas Medii in G eſt reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} GV$.

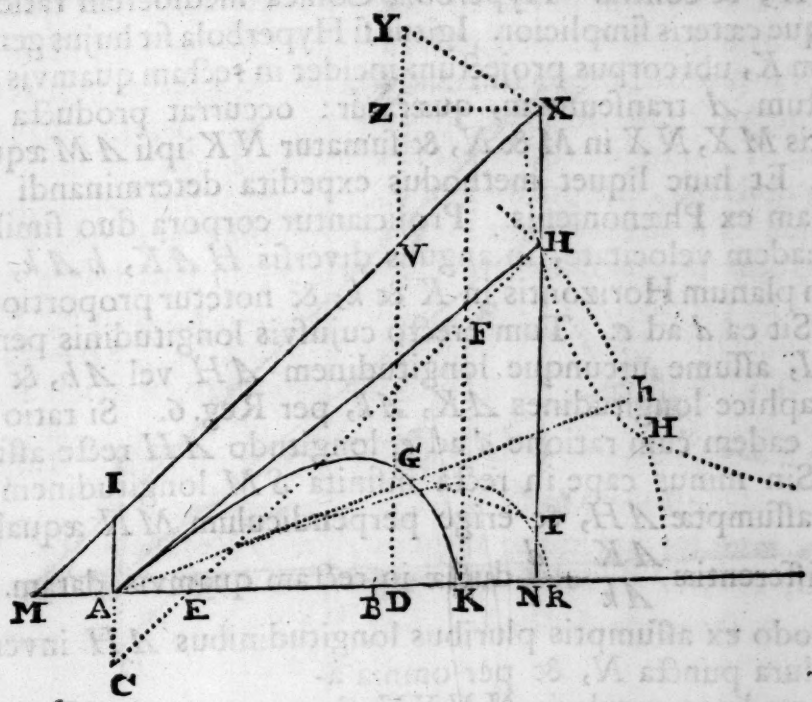
Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat Hyperbolam AGK, & AH producta occurrat Aſymptoto MX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri Aſymptoto MX in I: erit Medii denſitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes Regulæ.

Reg. 1.

Reg. 1. Si ſervetur tum Medii denſitas in *A*, tum velocitas quaeum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus *NAH*, tum Medii denſitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus *NAH* quam corporis velocitas in *A*, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in *A* ad



gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio *AH* ad *AI* in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$; & propterea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel Medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

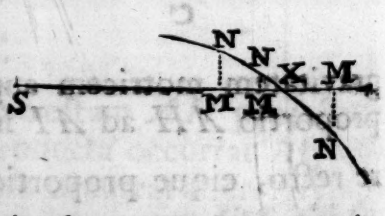
De Motu Corporum

Reg. 4. Quoniam densitas Medii prope verticem Hyperbolæ major est quam in loco *A*, ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad tangentem *AH* inveniri, & densitas in *A* augeri in ratione paulo majore quam semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & describenda sit Figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut sit *HX* æqualis facto sub $n+1$ & *AI*; centroque *X* & Asymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* describatur Hyperbola, ea lege, ut sit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

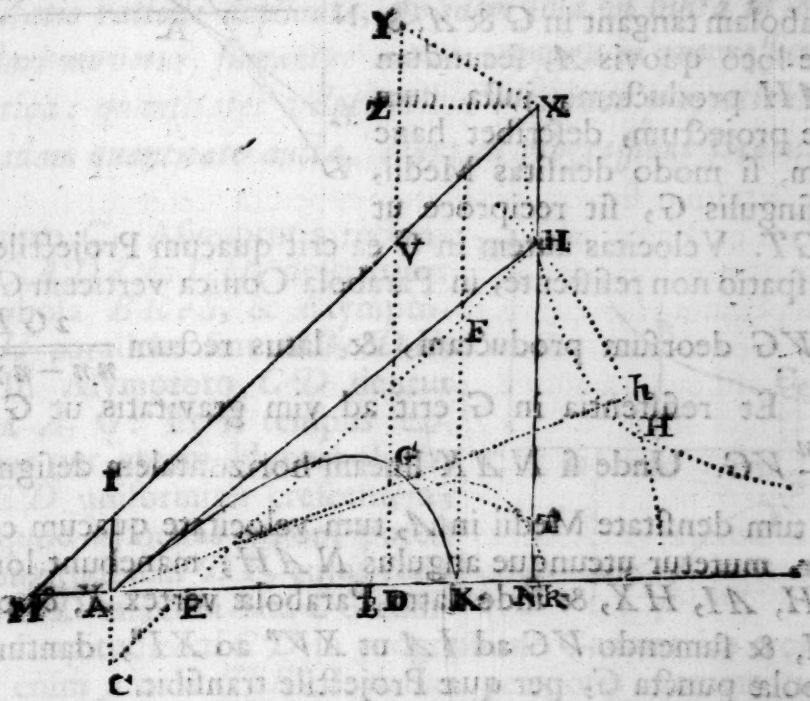
Reg. 6. Quo major est numerus *n*, eo magis accuratæ sunt hæ Hyperbolæ in ascensu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus descensu ad *K*; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* transeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Asymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & sumatur *NK* ipsi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diversis *HAK*, *hAk*, incidantque in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo *AI*, assume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* sit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem assumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus *AH* inveniendæ sunt plura puncta *N*, & per omnia agenda Curva linea regularis *NNXN*, secans rectam *SMMM* in *X*. Assumatur demum *AH* æqualis abscissæ *SX* & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH* ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudines *AI* & *AH*, quas invenire oportuit. Hisce vero datis dabitur & resistentia Medii in loco *A*, quippe quæ sit ad vim gravitatis ut *AH* ad 2*AI*. Augenda est autem densitas Medii per Reg. 4; & resistentia modo inventa, si in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



Reg.

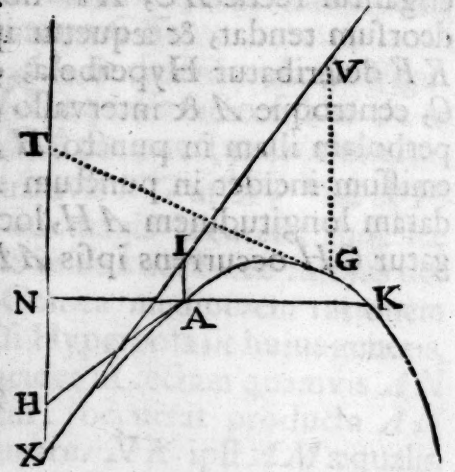
Reg. 8. *Inventis longitudinibus AH, HX;* si jam desideretur positio rectæ *AH*, secundum quam Projectile, data illa cum velocitate emissum, incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorsum tendat, & æquetur ipsi *AI* seu $\frac{1}{4}HX$. Asymptotis *AK*, *KF* describatur Hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* describatur Circulus secans Hyperbolam illam in puncto *H*; & Projectile secundum rectam *AH* emissum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in Circulo descripto. Agatur *CH* occurrens ipsis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & ob



parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* est ad *AE* ut *FH* ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Asymptotis *AK*, *KF* descriptam, cujus conjugata transit per punctum *C*, atque adeo reperitur in communi intersectione Hyperbolæ hujus & Circuli descripti. *Q.E.D.* Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, sive recta *AKN* horizonti parallela sit, sive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus intersectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*; & quod in Praxi mechanica sufficit

De Motu Corporum

Circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, Circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.



Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi $XAGK$ Parabolam deſignet quam recta XV tangat in vertice X, ſintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abſciſſarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela ſit VG, & GT, AH Parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, ſecundum rectam AH productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medii, in locis ſingulis G, ſit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quacum Projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica verticem G, diametrum VG deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GTq.}{nn-n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{3nn-3n}{n-2} VG$. Unde ſi NAK lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, & poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile tranſibit.

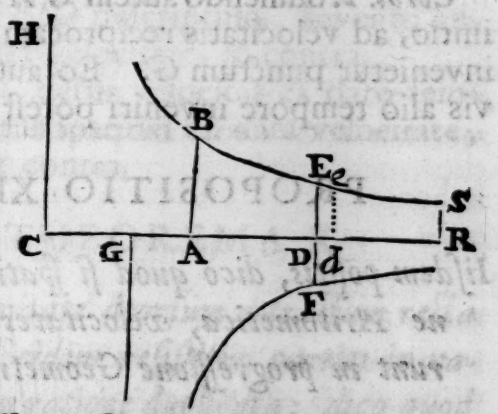
SECTIO

SECTIO III.

De Motu Corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si Corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita in Medio ſimilari movetur, ſumantur autem tempora in progreſſione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, datâ quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometrica.



Centro C, Aſymptotis rectangulis $CA\mathcal{D}d$ & CH, deſcribatur Hyperbola $BEeS$, & Aſymptoto CH parallelæ ſint AB, $\mathcal{D}E$, de. In Aſymptoto $C\mathcal{D}$ dentur puncta A, G: Et ſi tempus exponatur per aream Hyperbolicam $AB\mathcal{E}\mathcal{D}$ uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem $\mathcal{D}F$, cujus reciproca $G\mathcal{D}$ una cum data CG componat longitudinem $C\mathcal{D}$ in progreſſione Geometrica creſcentem.

Sit enim areola $\mathcal{D}Eed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit $\mathcal{D}d$ reciproce ut $\mathcal{D}E$, adeoque directe ut $C\mathcal{D}$. Ipſius autem $\frac{1}{G\mathcal{D}}$ decrementum, quod (per hujus Lem. 11) eſt $\frac{\mathcal{D}d}{G\mathcal{D}q}$, erit ut $\frac{C\mathcal{D}}{G\mathcal{D}q}$ ſeu $\frac{CG+G\mathcal{D}}{G\mathcal{D}q}$, id eſt, ut $\frac{1}{G\mathcal{D}}+\frac{CG}{G\mathcal{D}q}$. Igitur tempore $AB\mathcal{E}\mathcal{D}$ per additionem datarum particularum $E\mathcal{D}de$ uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{G\mathcal{D}}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per Hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velo-

De Motu Corporum

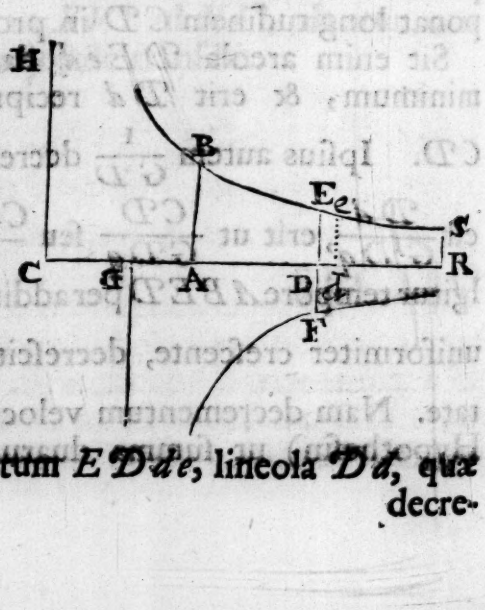
velocitas, altera ut quadratum velocitatis: & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data CG augeatur; summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si, datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.



In Asymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum data CG componit longitudinem CD, in progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, linea Dd, quæ decre-

decrementum est ipsius GD, erit reciproce ut ED, adeoque directe ut CD, hoc est, ut summa ejusdem GD & longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula $DdeE$ describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est, directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ GD, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea GD. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem GD, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica $DESR$.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum R, invenietur punctum G, capiendo GR ad GD, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis $RSED$ descriptum. Invento autem puncto G, datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI, detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

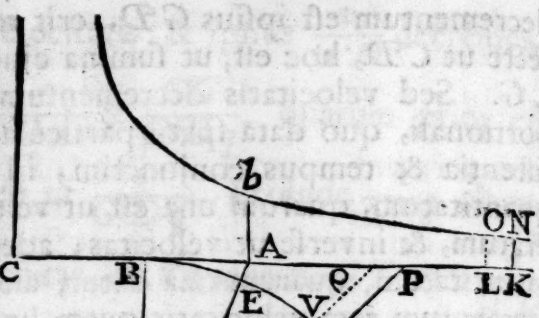
Posito quod Corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod si Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur Circuli quadrans $BETF$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, semidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit

ut

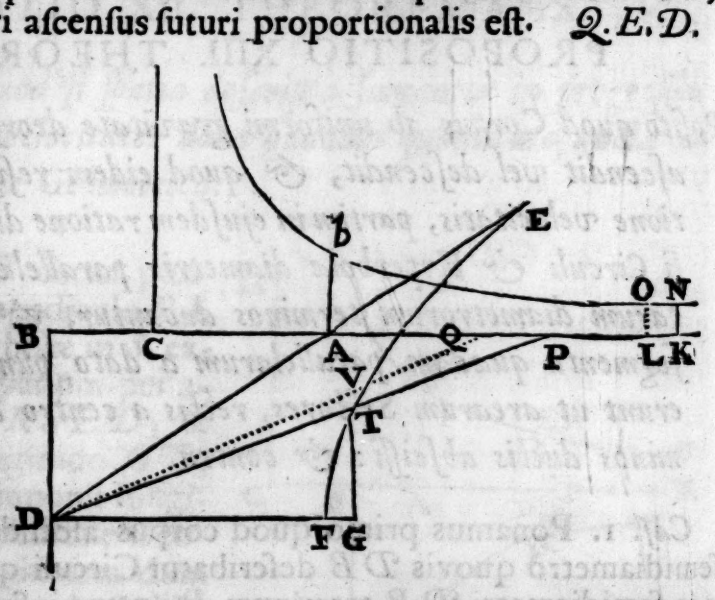
De Motu Corporum

ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, fit resistentia tota in P ut $AP\,quad + 2BAP$. Jungantur DA, DP Circulum secantes in E ac T, & exponatur gravitas per $DA\,quad$, ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut DAq ad $APq + 2BAP$: & tempus ascensus omnis futuri erit ut Circuli sector $EDTE$.



Agatur enim DVQ, abscindens & velocitatis AP momentum PQ, & Sectoris DET momentum DTV dato temporis momento respondens: & velocitatis decrementum illud PQ erit ut summa virium gravitatis DAq & resistentiæ $APq + 2BAP$, id est (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) ut $DP\,quad$. Proinde area DPQ, ipsi PQ proportionalis, est ut $DP\,quad$; & area DTV, (quæ est ad aream DPQ ut DTq ad DPq) est ut datum DTq. Decrescit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori ascensus futuri proportionalis est. *Q.E.D.*

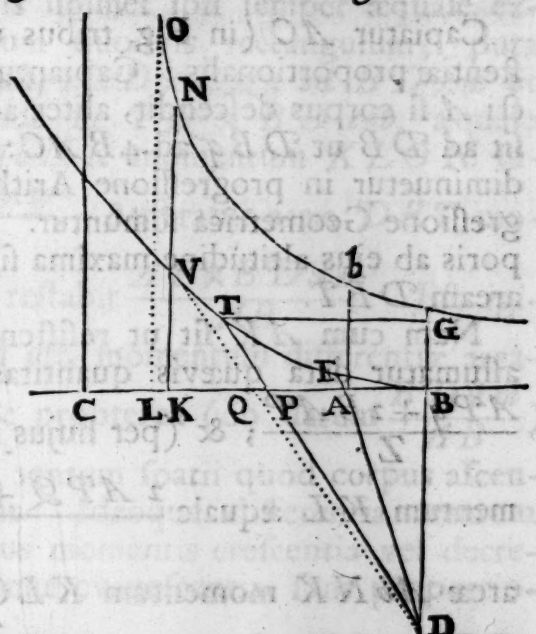
Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq + 2BAP$, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per DAq exponi possit; capiatur BD ejus longitudinis, ut sit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, sitque DF ipsi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F describatur Hyperbola $FTVE$ cujus semidiametri conjugatæ sint DB & DF, quæque secet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus ascensus futuri ut Hyperbolæ sector TDE.



Nam

Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq adeoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq ſeu $GDq - DFq$ ad BDq utque GDq ad BPq & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPQ ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur Hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit Hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus deſcenſus.



Nam velocitatis incremẽtum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, adeoque ut GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq utque GDq ad BDq & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP eſt ad velocitatem quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris centro D, radio DA, angulo ADT deſcripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in Medio non reſiſtente, tem-

pori atque adeo sectori huic proportionalis est; in Medio resistente est ut triangulum; & in Medio utroque, ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires CK in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma 11.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente BET Circulo, (in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.) linea AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & DPq seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Cas.

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq$ linea AC (Fig. Caſ. 2. Prop. XIII) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit ad DPq ut DFq ſeu DBq ad $BPq - BDq$ ſeu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id eſt, ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea AC (Fig. Caſ. 3. Prop. præced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione; ſi pro area DTV, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas AP, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud, proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur ſi longitudo aliqua V ſumatur in ea ratione ad duplum longitudinis M, quæ oritur applicando aream DET ad BD, quam habet linea DA ad lineam DE; ſpatium quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in Medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium quod in Medio non reſiſtente eodem tempore deſcribere poſſet, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in Medio non reſiſtente eſt in duplicata ratione temporis, ſive ut V^2, & ob datas BD & AB, ut

De Motu Corporum $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Momentum hujus areæ sive huic æqualis $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$ est ad momentum differentiæ arearum DET & $AbNK$, ut $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, hoc est, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$, ad $\frac{1}{2}BD \times AP$, sive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; adeoque ubi areæ DET & DAP quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur est area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum DET & $AbNK$. Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc sunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia; ob eorum analoga incrementa necesse est ut in æqualibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

SECTIO

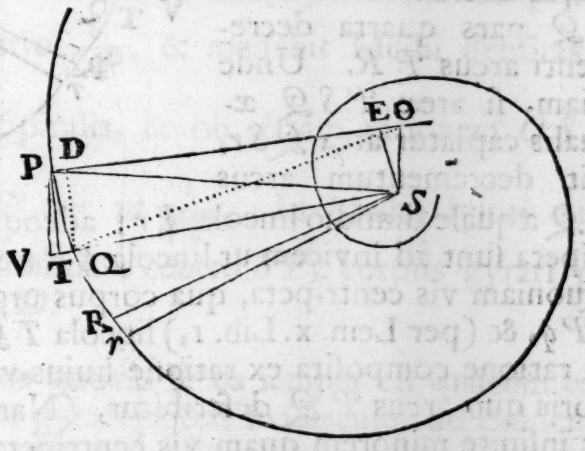
SECTIO IV.

De Corporum Circulari Motu in Mediis reſiſtentibus.

LEMMA III.

Sit PQRr *Spiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ*quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* ſubducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo Circulus qui tranſit per puncta *O*, *S*, *P* tranſibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic Circulus in loco coitus *PQ* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter Circuli hujus, & angulus *OSP* in ſemicirculo rectus. *Q.E.D.*



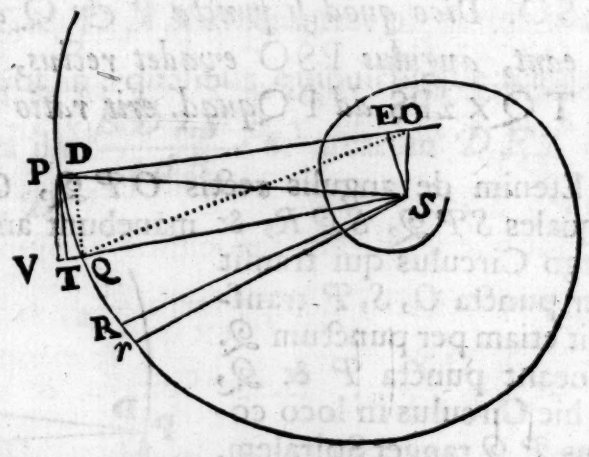
Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, ſeu 2*PO* ad 2*PS*. Item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PO*. Et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ* × 2*PS*. *Q.E.D.*

PROPO-

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore Lemmate, & producatur SQ ad V, ut sit SV æqualis SP. Tempore quovis, in Medio resistente, describat corpus arcum quam minimum PQ, & tempore duplo arcum quam minimum PR; & decrementa horum arcuum ex resistentia oriunda, sive defectus ab arcubus qui in Medio non resistente iisdem temporibus describerentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. Unde etiam, si areæ PSQ æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcus PQ æquale dimidio lineolæ Rr; adeoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas simul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, est reciproce ut SPq, & (per Lem. x. Lib. 1,) lineola TQ, quæ vi illa generatur, est in ratione composita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ describitur, (Nam resistentiam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$ id est (per Lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est, in subduplicata ratione ipsius SP reciproce. Et simili argumento, velocitas qua arcus QR describitur, est in subduplicata



duplicata ratione ipsius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione SQ ad SP, sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, est arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ sit æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex resistentia oriundum, sive hujus duplum Rr, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, densitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP, corpus gyrari potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in Circulo, ad eandem a centro distantiam SP.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam

De Motu Corporum

tam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ ſive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Data igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & viceverſa ex data illa proportione datur Spiralis.

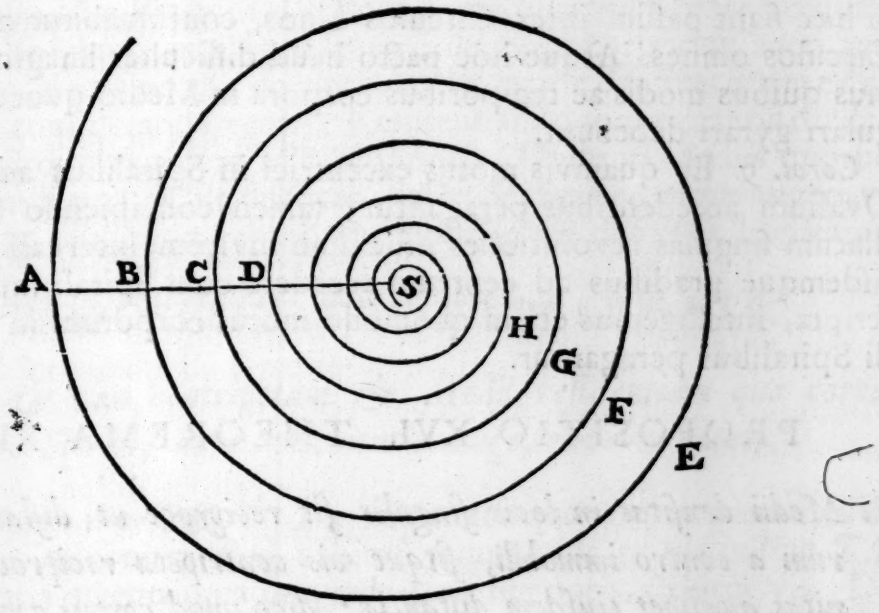
Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac Spirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. x, Lib. 1,) deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri, in ſubduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora deſcenſus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR atque in recta SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſus in Spirali erit ad tempus deſcenſus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo Circuli; & manentibus hiſce Circulis, mutetur utcunque angulus quem Spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra Circulorum circumferentias, pergendo in Spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut Tangens anguli illius quem Spiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut Secans anguli ejuſdem, vel etiam reciproce ut Medii denſitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo ſecuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro (id eſt, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD &c. facere, & interſectionibus

ctionibus distinguet Radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut



perimetri Orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverse; id est, ut $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{1}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{1}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{1}{2}} - BS^{\frac{1}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}AS$ ad AB quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S, intervallis continue proportionalibus SA, SB, SC, &c. describe Circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his Circulis, in Medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos Circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse Secantem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium AS, ad Secantem anguli

De Motu Corporum

quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum Tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter Circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter Circulos binos, continuabitur motus per Circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in Spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^n}$, sive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, adeoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam, ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP^{cub}, erit $1-\frac{1}{2}n=0$; adeoque resistentia & densitas Medii nulla erit, ut in Propositione nona Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scho-

Scholium.

Cæterum hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & Medii reſiſtentiam qua corpus in data Spirali, data velocitatis Lege, revolvi poteſt.

Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas Medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data Lege vis centripetæ, invenire Medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam Spiralem deſcribet.

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii denſitas: ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propoſitione decima, & Lemmate ſecundo; & Lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentia Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

SECTIO V.

De Denſitate & Compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtatica.

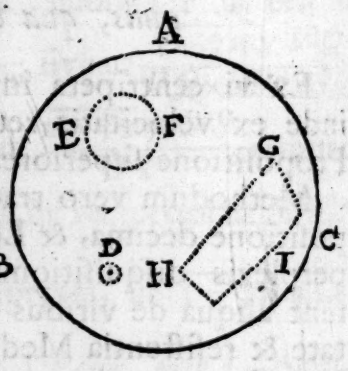
Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & abſque omni motu a preſſione illa orto permanent in locis ſuis.

Caſ. 1. In vaſe ſphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem a centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui a preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra Hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra Hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua a centro diſtantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars



pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique: ſit enim *EF* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per Caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per Caſum eundum primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod Sphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed &, per Caſum ſecundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt a partibus Sphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quod Fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi Fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem preſſioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

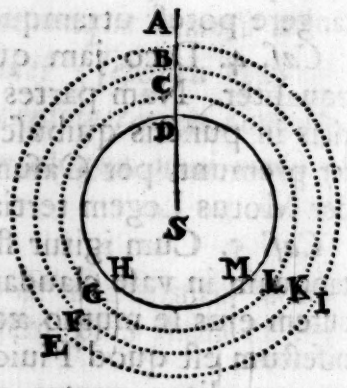
Caſ. 7. Idcoque in vaſe rigido Fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, abſque motu locali: & ſubinde partes fluidi, per Caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Coroll.

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt, nisi quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo Sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus Cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.



Sit *DHM* superficies fundi, & *AEI* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *BFK*, *CGL* distinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *AE* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (per Prop. XIX.) pro mensura sua æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione, pro mensura sua, & insuper vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta, & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus Orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (si modo Orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus Cylindri præfi-

præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet Propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi Fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum, a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem Theorematis hujus ad Caſus ſingulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe, ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui, per Caſ. 5. Prop. XIX, jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam Fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquili-

De Motu Corporum

æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis Gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum Caſuum Demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum Figuras externas, patet inſuper, per Corollarium

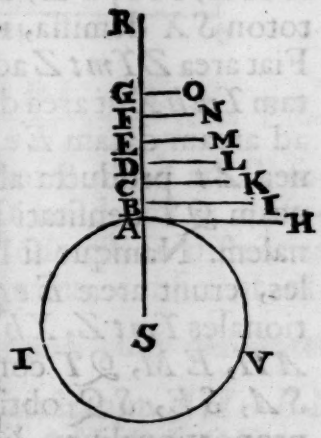
Prop.

Prop. XIX, quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates Fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.

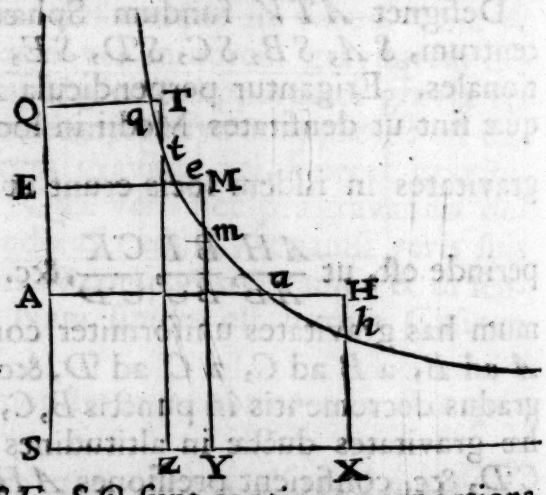
Deſignet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, &c. diſtantias continue proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD, &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, quibus fundum ATV (juxta Theorema XV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps: adeoque particulæ primæ A denſitas AH eſt ad particulæ ſecundæ B denſitatem



De Motu Corporum

tatem BI ut ſumma omnium $AH+BI+CK+DL$, in infinitum, ad ſummam omnium $BI+CK+DL$, &c. Et BI denſitas ſecundæ B, eſt ad CK denſitatem tertiæ C, ut ſumma omnium $BI+CK+DL$, &c. ad ſummam omnium $CK+DL$, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales, per hujus Lem. 1. proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis A, B, C, &c. ſint ut AH, BI, CK, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & (ex æquo) in diſtantiis SA, SC, SE continue proportionalibus, erunt denſitates AH, CK, EM continue proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus SA, SD, SG, denſitates AH, DL, GO erunt continue proportionales. Cocant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo A ad ſummitatem Fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus SA, SD, SG, denſitates AH, DL, GO, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco Q. Centro S, Aſymptotis rectangulis SQ, SX, deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula AH, EM, QT in a, e, q, ut & perpendicula HX, MY, TZ, ad Aſymptoton SX demiſſa, in h, m & t. Fiat area $ZTmtZ$ ad aream datam $YmhX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EeaA$; & linea Zt producta abſcindet lineam QT denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ SA, SE, SQ ſunt continue proportionales, erunt areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $TmtZ, XhmY$ etiam æquales, & lineæ SX, SY, SZ, id eſt AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.

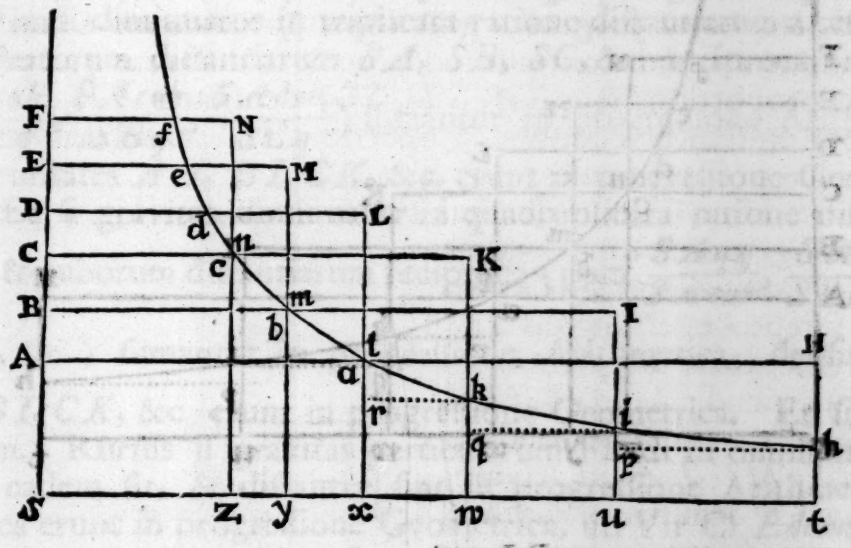


PROPO-

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſica, denſitates Fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometrica.

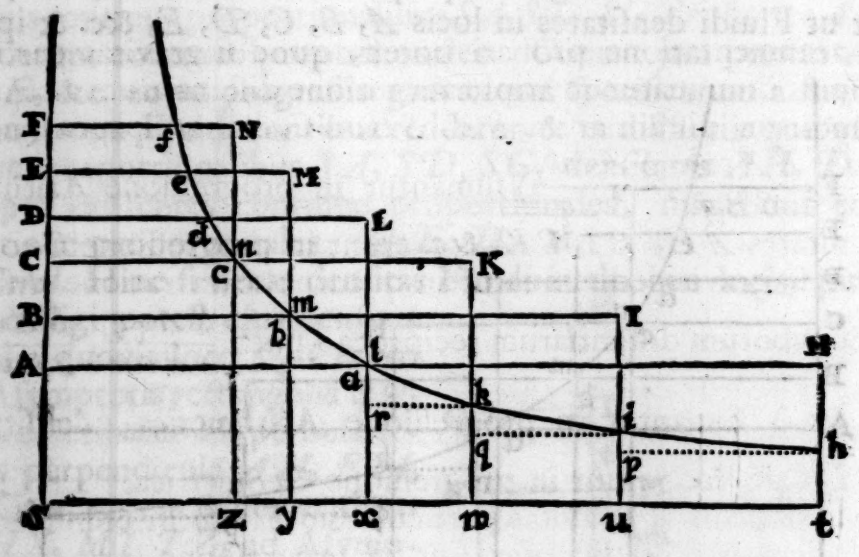
Deſignet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* diſtantias in progreſſione Geometrica. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. quæ ſint ut Fluidi denſitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. & ipſius



gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}, \frac{BI}{SBq}, \frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, ſecundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D*, &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH-BI$, $BI-CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c.

De Motu Corporum

Centro S, Asymptotis SA, Sx, describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad Asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut Aa, Bb, &c. Est enim, ex natura Hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa.



Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $zthn$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur

tur jam distantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progressione Musica, & differentiæ $Aa-Dd$, $Dd-Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est, AH, DL, FN, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta AH & CK, dabitur area $thkw$ harum differentiæ tw respondens; & inde invenietur densitas FN in altitudine quacunque SF, sumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thkw$ ut est differentia $Aa-Ff$ ad differentiam $Aa-Cc$.

Scholium.

Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) sumantur in progressione Arithmetica; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) sumantur in progressione Arithmetica; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis Leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ, densitas erit reciproce in sesquiplicata ratione

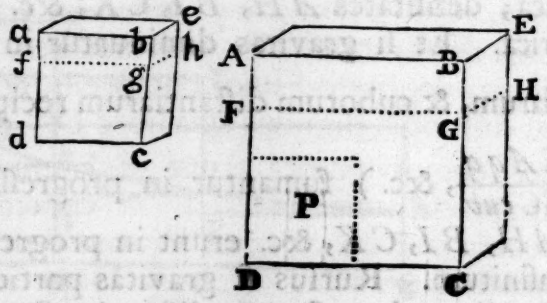
De Motu Corporum

tione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versa, particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico *ACE*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum *DP* urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum inclusum ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut *ab cub.* ad *AB cub.* Sed pressio qua quadratum *DB* urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc est, ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex æquo, pressio qua latus *DB* urget Fluidum, est ad pressionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc est, in proportione *ab* ad *AB*: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes,



nes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum fgh in cubo minore ut ab ad AB, hoc eſt, reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt, reciproce ut cuborum latera AB, ab; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum DB, db ut ſummæ virium; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut ab *quad.* ad AB *quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris db ut ab *cub.* ad AB *cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitarum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida de quibus actum eſt in hac Propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. An vero Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematice demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus Quæſtionem illam tractandi.

SECTIO

De Motu Corporum

SECTIO VI.

De Motu & Reſiſtentia Corporum Funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directe, & materia inverſe. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce ſunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

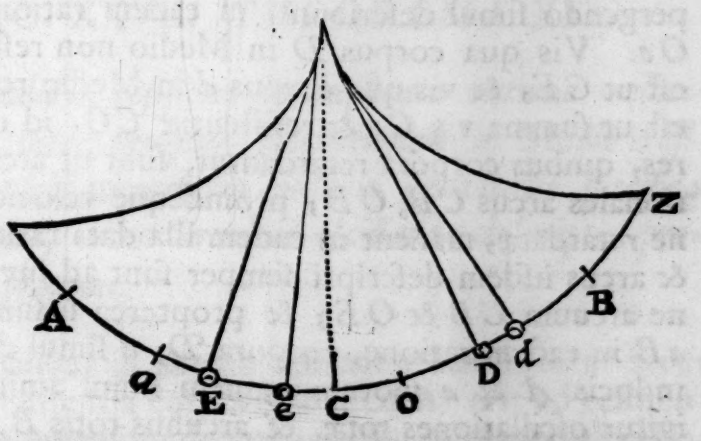
Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſupra explicui; adeoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

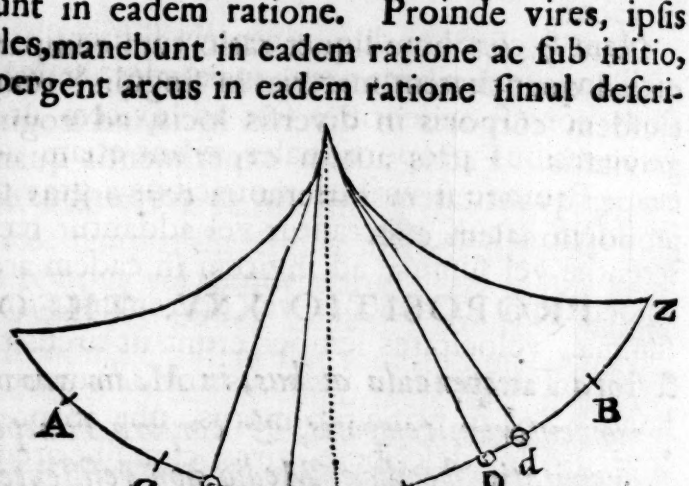
Corpora Funependula quibus, in Medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora Funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.



Sit *AB* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur

De Motu Corporum

tur eadem per datam arcus Cycloidis partem CO, & ſumatur arcus Od in ratione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB: & vis qua corpus in d urgetur in Medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis Cd ſupra reſiſtentiam CO, exponetur per arcum Od, adeoque erit ad vim qua corpus D urgetur in Medio non reſiſtente, in loco D, ut arcus Od ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut arcus OB ad arcum CB. Proinde ſi corpora duo, D, d exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus CB & OB, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi BD & Bd, & arcus reliqui CD, Od erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipſis CD, Od proportionales, manebunt in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Od ſemper erunt ut arcus toti CB, OB, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo D, d ſimul pervenient ad loca C & O, alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in Medio reſiſtente ad locum O. Cum autem velocitates in C & O ſint ut arcus CB, OB; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi CE & Oe. Vis qua corpus D in Medio non reſiſtente retardatur in E eſt ut CE, & vis qua corpus d in Medio reſiſtente retardatur in e eſt ut ſumma vis Ce & reſiſtentiæ CO, id eſt ut Oe; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus CE, Oe proportionales arcus CB, OB; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum CB & OB; & propterea ſi ſumantur arcus toti AB, aB in eadem ratione, corpora D, d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis BA, Ba proportionales ſunt arcuum partes quælibet BD, Bd vel BE, Be quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*



Corol.

Corol. Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum Funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti: reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si Corporibus Funependulis reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id eſt, ut AA ad BB, quam proxime. Si reſi-

De Motu Corporum

ſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in Medio non reſiſtente; & reſiſtentia BB efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id eſt, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si Corpori Funependulo in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

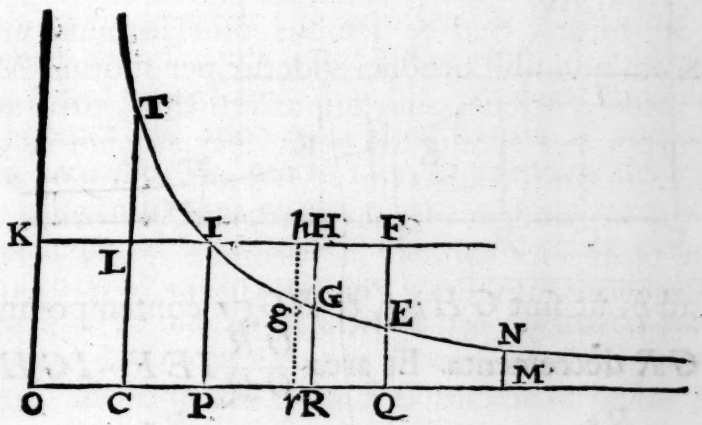
Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *Ca* arcum aſcenſu deſcriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione

ſitione XXV conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis qua corpus oſcillans urgetur in loco quovis D, ad vim reſiſtentiæ ut arcus CD ad arcum CO, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius Aa. Ideoque vis qua corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id eſt, vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum C ad arcum CO; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Poſito quod Corpori in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit Ba (Fig. Prop. XXV) arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ ſemiſſis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia cor-

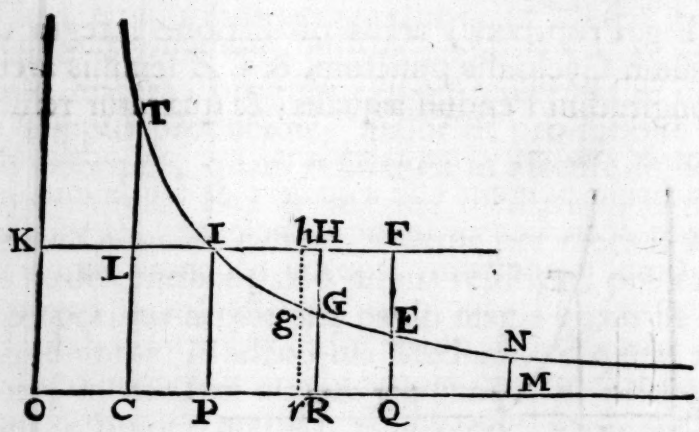


poris in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, C, P, Q, ea lege, ut (ſi erigantur perpendicula OK, CT, PI, QE, centroque O & Aſymptotis OK, OQ deſcribatur Hyperbola $TIGE$ ſecans perpendicula CT, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela Aſymptoto OQ occurrens Aſymptoto OK in K, & perpendiculis CT & QE in L & F) fuerit area Hyperbolica $PIEQ$ ad aream Hyperbolicam $PITC$ ut arcus BC deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum Ca aſcenſu deſcriptum, & area IEF ad aream

De Motu Corporum

ream ILT ut OQ ad OC. Dein perpendiculo MN abscindatur area Hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum: erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & arcus illi sint ut areæ $PINM, PIEQ, PIGR, PITC$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper Dd spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & pro-



ducatur rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$ contemporanea arearum $IGH, PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incrementum $GHhg-\frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr\times HG-\frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ seu $Rr\times RG$, ut $HG-\frac{IEF}{OQ}$ ad RG; adeoque ut $OR\times HG-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR\times GR$ seu $OP\times PI$, hoc est (ob æqualia $OR\times HG, OR\times HR-OR\times GR, ORHK-OPIK, PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur

dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, erit incrementum areæ Y ut $PIGR-Y$.

Quod ſi V deſignet vim a gravitate oriundam, arcui deſcribendo CD proportionalem, qua corpus urgetur in D: & R pro reſiſtentia ponatur: erit $V-R$ vis tota qua corpus urgetur in D. Eſt itaque incrementum velocitatis ut $V-R$ & particula illa temporis in qua factum eſt conjunctim: Sed & velocitas ipſa eſt ut incrementum contemporaneum ſpatii deſcripti directe & particula eadem temporis inverſe. Unde, cum reſiſtentia (per Hypotheſin) ſit ut quadratum velocitatis, incrementum reſiſtentiæ (per Lem. 11) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id eſt, ut momentum ſpatii & $V-R$ conjunctim; atque adeo, ſi momentum ſpatii detur, ut $V-R$; id eſt, ſi pro vi V ſcribatur ejus exponens $PIGR$, & reſiſtentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR-Z$.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area Y in ratione $PIGR-Y$, & area Z in ratione $PIGR-Z$. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo Ca, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum C, reſiſtentia citius evaneſcet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio & fine motus, ubi arcus CD, CD arcubus CB & Ca æquantur, adeoque ubi recta RG incidit in rectas QE & CT. Et area Y ſeu $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incipit deſinitque ubi nulla eſt, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ}IEF$ & IGH æqualia ſunt: hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta RG incidit in rectas QE & CT. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ *IEF* ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR* − Y) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ, & ipſo motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide abſque omni reſiſtentia oſcillantis.

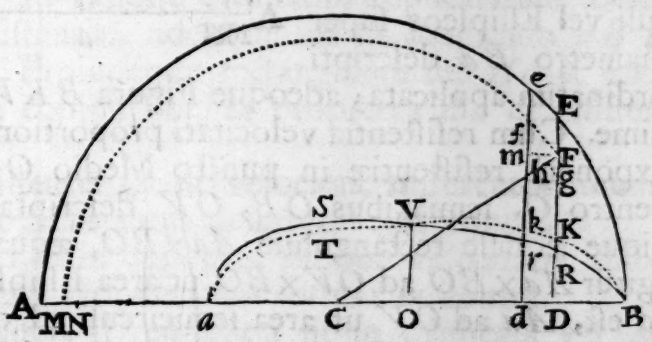
Cæterum ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc Propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt Propoſitionem ſequentem ſubjungere, quæ & generalior ſit & ad uſus Philoſophicos abunde ſatis accurata.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis ſit Cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ ſint ad longitudinem Penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum, & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum, ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oſcillatione integra deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræſentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* ſecundum tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli

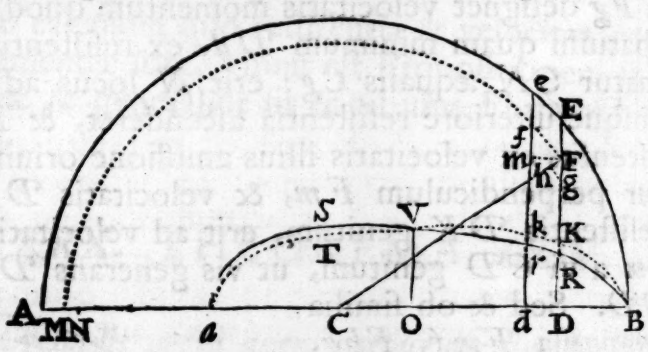
penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit $\mathcal{D}K$ exponens resistentiæ. Centro C & intervallo CA vel CB constructur Semicirculus $BEeA$. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium $\mathcal{D}d$, & erectis perpendiculis $\mathcal{D}E$, de circumferentiæ occurrentibus in E & e, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto B, acquireret in locis $\mathcal{D}$ & d. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa $\mathcal{D}E$, de; sitque $\mathcal{D}F$ velocitas quam acquirit in $\mathcal{D}$ cadendo de B in Medio resistente. Et si centro C & intervallo CF describatur Circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, erit M locus ad quem deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam si Fg designet velocitatis momentum quod corpus $\mathcal{D}$, describendo spatium quam minimum $\mathcal{D}d$, ex resistentia Medii amittit; & sumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & MN erit decrementum ascensus ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis $\mathcal{D}F$ decrementum Fg a resistentia $\mathcal{D}K$ genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum fm a vi $C\mathcal{D}$ genitum, ut vis generans $\mathcal{D}K$ ad vim generantem $C\mathcal{D}$. Sed & ob similia triangula Fmf, Fhg, $F\mathcal{D}C$, est fm ad Fm seu $\mathcal{D}d$, ut $C\mathcal{D}$ ad $\mathcal{D}F$; & ex æquo Fg ad $\mathcal{D}d$ ut $\mathcal{D}K$ ad $\mathcal{D}F$. Item Fh ad Fg ut $\mathcal{D}F$ ad CF; & ex æquo perturbate, Fh seu MN ad $\mathcal{D}d$ ut $\mathcal{D}K$ ad CF seu CM; ideoque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}K$. Ad punctum mobile M erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ æquabitur summæ omnium $MN \times CM$, adeoque summæ omnium $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}K$, id est, areæ $BKkVTa$. Q. E. D.



Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa, colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam si uniformis sit resistentia DK, Figura $aBKkT$ rectangulum erit sub Ba & DK; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa erit æquale rectangulo sub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Prop. XXVIII demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura $aBKkT$ Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem BA, velocitas in loco quovis D foret ut Circuli diametro AB descripti ordinatim applicata DE. Proinde cum Ba in Medio resistente, & BA in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates in singulis ipsius Ba punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis BA, ut est Ba ad BA; erit velocitas DK in Medio resistente ut Circuli vel Ellipseos super diametro Ba descripti ordinatim applicata; adeoque Figura $BKVTa$ Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit OV exponens resistentiæ in puncto Medio O; & Ellipsis $aBRVS$, centro O, semiaxibus OB, OV descripta, Figuram $aBKVT$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, Aa ad OV ut area semicirculi ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.



Quod si resistentia DK sit in duplicata ratione velocitatis, Figura $BKVTa$ Parabola erit verticem habens V & axem OV, ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & OV quam proxime. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & OV, adeoque OV æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola $BRVSa$ congruat cum

cum Figura $BKVTa$ in puncto medio V, hæc si ad partem alterutram BRV vel VSa excedit Figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si Corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum CB, Ca differentia Aa, æqualis erat areæ BKT. Et area illa, si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc est, in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his Propoſitionibus, per oſcillationes Pendulorum in Mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam Mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per Experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{3}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis Globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus Globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione; & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Deſignet

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^{2}$. Cum velocitates maximæ ſint in Cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in Circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; adeoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quam in Circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo ſint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproxime, in utraque Curva: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, una cum reſiſtentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in Circulo obſervatæ, velocitates vero maximæ ponendæ ſunt arcubus dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{1^{\frac{1}{2}}}{121}=A+B+C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35^{\frac{1}{2}}}=4A+8B+16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9^{\frac{2}{3}}}=16A+64B+256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem Analyticam, fit $A=0{,}0000916$, $B=0{,}0010847$, & $C=0{,}0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916\,V+0{,}0010847V^{\frac{3}{2}}+0{,}0029558V^{2}$: & propterea cum (per Corollarium Propoſitionis xxx) reſiſtentia Globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV+\frac{16}{23}BV^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{4}CV^{2}$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0{,}0000583\,V+0{,}0007546\,V^{\frac{3}{2}}+0{,}0022169\,V^{2}$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam, id eſt, ad 121 digitos. Unde cum V in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus Globi in caſu ſecundo ut 0,0030298 ad 121, in quarto ut 0,0417402 ad 121, in ſexto ut 0,61675 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120-\frac{8}{9^{\frac{2}{3}}}$ ſeu $119\frac{1}{9}$ digitorum. Et propterea cum radius eſſet 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum ſuſpenſionis &

De Motu Corporum

& centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124\frac{3}{11}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam Aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{1}{62}$, idque in Cycloide, ad quam motum Penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{1}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61675 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus, ut 0,56752 ad 213,4 id est, ut 1 ad $376\frac{1}{10}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{10}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{10}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $31\frac{7}{16}$, describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus Pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descen-

Deſcenſus primus	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Poſtea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$, ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum Globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia Globi cum velocitate V moti, in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000207\,V^{\frac{1}{2}} + 0{,}000659\,V^{2}$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0{,}000659\,V^{2}$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$, ut $0{,}002217\,V^{2}$ ad 121: & inde fit reſiſtentia Globi lignei ad reſiſtentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{11}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam

De Motu Corporum

ſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{11}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{1}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1,5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex Globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur

untur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396. Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam, ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,396; & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; adeoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproxime, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{1}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut Globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque (cum demonſtratio Vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum Fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{1}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{1}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum in aqua			$\frac{22}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{3}{5}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

De Motu Corporum

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum a Globo, in Aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima, in casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum, in casu columnæ quartæ, ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque adeo resistentia, cum sit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{1}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{2}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{2}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{2}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{2}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plus-

pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod Arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur, reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in Aere oſcillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabula ſequente deſcribitur.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque ſucceſſive oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis Vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora, pari denſitate, procul-

De Motu Corporum

dubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut Oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus Vini. Verum in liquoribus qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in Aqua ſeu dulci ſeu ſalſa, in Spiritibus Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accurate obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Denique cum receptiſſima Philoſophorum ætatis hujus opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longe ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externa ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam a perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui pendulum a perpendiculo digreſſum ſemper urget.) Huic ponderi addebam pondus Aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum

tallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſita pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque adeo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externa, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam $A+78B$ ut 77 ad 78, & diviſim $A+B$ ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque $A+B$ ad B ut 77×77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externa ſuperficie, & amplius. Sic vero diſputamus ex Hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua cauſa latente oriatur, ſed ab actione ſola Fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulſus ſum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum uncо infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

SECTIO

De Motu Corporum

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Reſiſtentia Projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si Corporum Syſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno Syſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, (eæ inter ſe quæ in uno ſunt Syſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuo quæ in eodem ſunt Syſtemate, niſi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent ſe mutuo, niſi viribus acceleratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe: dico quod Syſtematum particulæ illæ pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri.

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem in fine temporum illorum ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius Syſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales Figurarum ſimilium partes a particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi Syſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incæptorum motuum, pergent ſimiliter moveri uſque donec ſibi mutuo occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. 1. Si viribus aliquibus ſe mutuo agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per Legum Corollarium ſecun-

fecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt per Corol. 1, & 8 Prop. IV, Lib. 1. ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter Syſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum Syſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque Syſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis Syſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque adeo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iiſdem poſitis, dico quod Syſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum ſuarum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis partium Syſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ Syſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum.

Prioris

De Motu Corporum

Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantiæ particularum Systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in Systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter earum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si Systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistentiam patitur quæ est in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, resistentia foret in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispo-

diſpoſitis conſtantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in ſubduplicata ratione virium *T* ad vires *V*: reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſime moti eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo Fluidi vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum reſiſtentiæ in Fluido Elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vi-

De Motu Corporum.

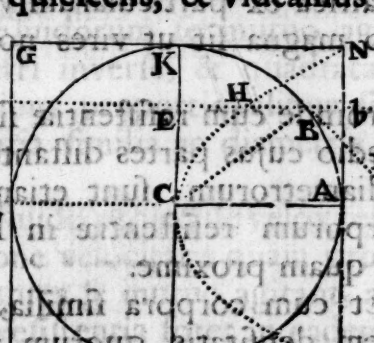
cissim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; sive Fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis Elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar Lanæ vel ramorum Arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in superioribus Corollarus.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris descripti, in Medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia Globi duplo minor quam resistentia Cylindri.

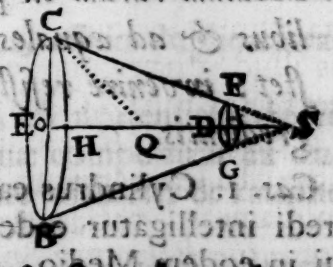
Nam quoniam actio Medii in corpus eadem est (per Legum Corol. 5.) sive corpus in Medio quiescente moveatur, sive Medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quiescens: considéremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Designet igitur *ABKI* corpus Sphæricum centro *C*, semidiametro *CA* descriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, secundum rectas ipsi *AC* parallelas: Sitque *FB* ejusmodi recta. In ea capiatur *LB* semidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ Sphæram tangat in *B*. In *KC* & *BD* demittantur



mittantur perpendiculares BE, DL, & vis qua particula Medii, ſecundum rectam FB oblique incidendo, Globum ferit in B, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa Globum deſcriptum perpendiculariter feriret in b, ut LD ad LB vel BE ad BC. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum Globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam FB vel AC, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum Globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ BC qua Globum directe urget, ut BE ad BC. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in Globum ſecundum rectam FB oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi ad Cylindri baſem circularem NAO erigatur perpendiculum bHE, & ſit bE æqualis radio AC, & bH æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit bH ad bE ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea ſolidum quod à rectis omnibus bH occupatur erit ad ſolidum quod à rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed ſolidum prius eſt Paraboloïs vertice C, axe CA & latere recto CA deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt Cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod Paraboloïs ſit ſemiſſis Cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri. *Q.E.D.*

Scholium.

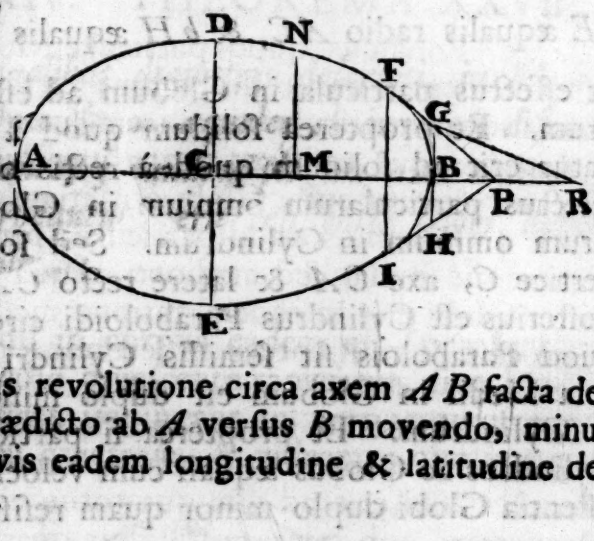
Eadem methodo Figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in Mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari $CEBH$, quæ centro O, radio OC deſcribitur, & altitudine OD, conſtruendum ſit fruſtum Coni $CBGF$, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plagam



axis sui versus D progredientium frustorum minime resistatur: bisecta altitudinem OD in Q & produc OQ ad S ut sit QS æqualis QC, & erit S vertex Coni cujus frustum quæritur.

Unde obiter, cum angulus CSB semper sit acutus, consequens est, quod si solidum $ADBE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $ADBE$ circa axem AB facta generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus FG, GH, HI in punctis F, B & I, ea lege ut GH sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, & FG, HI cum eadem GH contineant angulos FGB, BHI graduum 135: solidum, quod convolutione figuræ $ADFGHIE$ circa axem eundem CB generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui AB progrediatur, & utriusque terminus B præcedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si Figura $DNFG$ ejusmodi sit curva ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub* ad $4BR \times GB^2$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta describitur, in Medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.



PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si Medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constet: invenire resistentiam Globi in hoc Medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eadem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem Medio. Et ponamus quod particulæ Medii in quas Glo-

Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima reſiliant. Et cum reſiſtentia Globi (per Propoſitionem noviſſimam) ſit duplo minor quam reſiſtentia Cylindri, & Globus ſit ad Cylindrum ut duo ad tria, & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ipſaſque quam maxime reflectendo, duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: Cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Cylindri motum ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri; & Globus quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Globi motum ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Et propterea Globus reſiſtentiam patitur quæ ſit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quam in priore caſu, & reſiſtentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulæ Medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, ſed mediocri aliqua reſiliant a Globo; & reſiſtentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi Globus & particulæ ſint infinite dura, & vi omni elaſtica & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia Globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore Globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Corol. 2. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione velocitatis.

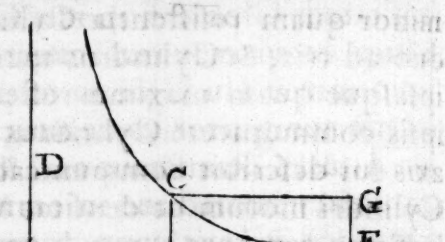
Corol. 3. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas Medii.

Corol. 5. Reſiſtentia Globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione denſitatis Medii.

Corol.

Corol. 6. Et motus Globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit AB tempus quo Globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C Asymptotis AD, AB describatur Hyperbola CF. Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF Hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum $CBEG$, & agatur AF ipsi BC occurrens in H. Et si Globus tempore quovis BE, motu suo primo BC uniformiter continuato, in Medio non resistente describat spatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expositum, idem in Medio resistente describet spatium $CBEF$ per aream Hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per Hyperbolæ ordinatam EF, amissa motus ejus parte FG. Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH, amissa resistentiæ parte CH. Patent hæc omnia per Corol. 1. Prop. v. Lib. II.



Corol. 7. Hinc si Globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem Globus tempore t in Medio resistente, per resistentiam R in duplicata velocitatis ratione decrescentem, amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut Logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$. Nam area Hyperbolica $BCFE$ est ad rectangulum $BCGE$ in hac proportione.

Scholium.

In hac Propositione exposui resistentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistentia sit ad vim qua totus Globi motus vel tolli possit vel generari

generari quo tempore Globus duas tertias diametri ſuæ partes, velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi, ſi modo Globus & particulæ Medii ſint ſumme elaſtica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi Globus & particulæ Medii ſunt infinite dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In Mediis autem continuis qualia ſunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum vivum, in quibus Globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique in hujuſmodi Mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim qua totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vaſe Cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et concipe cylindrum glaciei *APQB* ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquate implere. Ea vero ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acquirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei



ciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt. Ideoque per Theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc eſt, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli ſunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipſos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: ſed motum horizonti parallelum, a cohæſione illa oriundum, hic non conſideramus.

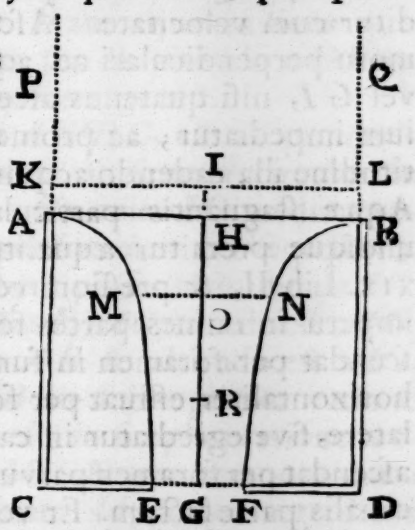
Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantum non tangat vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrime & ſine omni reſiſtentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed a lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quam in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, ſi modo

modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquæ plenum esset, aperui foramen ut aqua effluereț; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti â foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ quæ per foramen circulare in fundo vasis factum effluit, ea est quæ, pro diametro venæ, cum velocitate prædicta effluere debet.

In sequentibus igitur, plano foraminis parallelum duci intelligatur planum aliud superius ad distantiam diametro foraminis æqualem vel paulo majorem & foramine majore pertusum, per quod utique vena cadat quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque adeo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproxime. Spatium vero quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit & magis Mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vase per foramen *EF* egrediebatur, motum suum perpetuo servet & glacies quietem suam etiamsi in aquam fluidam resolvatur.



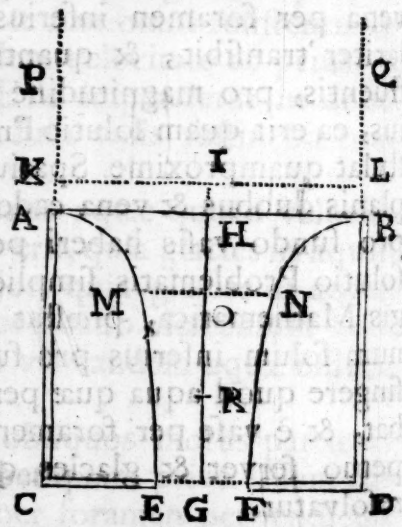
Cas. 2. Si foramen *EF* non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, si modo eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem

De Motu Corporum.

dem velocitatem acquirit in utroque casu, ut *Galilæus* demonstravit.

Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, ut intervallum inter superficies *AB* & *KL* quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam effingat: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam sine resistentia vena incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, nisi quatenus ascensus ejus ab aeris resistentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter, per Prop. XIX. Lib. II, & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit, eam esse quam in hac Propositione assignavimus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.



Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figura foraminis sed ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Cas. 6. Si vasis *ABDC* pars inferior in aquam stagnantem immergatur,

mergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas quacum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minime accelerabit. Patebit etiam & hic Caſus per Experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo CA producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli AB: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo $2GI$ vel $2CK$. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo, velocitatem ſuam qua exilit, acquirere poteſt.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum AB & EF, ad duplum circulum EF. Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poſſet altitudinem IG, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus EF & altitudo eſt $2IG$, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2IO$, nam circulus EF eſt ad circulum AB in ſubduplicata ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ Cylindrorum, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt AB & altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut HG ad $2HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad $2HO$, ſeu $IH+IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum impenditur: ac pro-

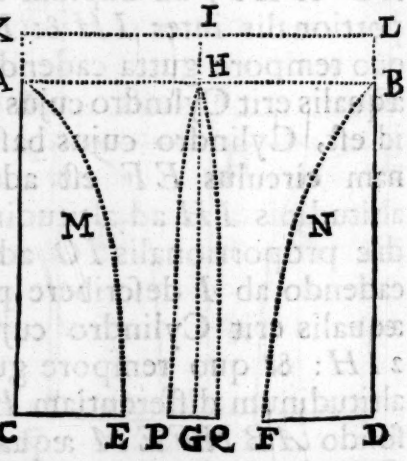
inde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2IH$, atque adeo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum AB & EF, ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF, ad duplum circulum minorem EF, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF, ſive ut circulus AB ad exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum. Nam ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum AB & EF, ad ſummam eorundem circulorum, per Cor. 4; & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF vel exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur Circellus PQ centro G deſcriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt GH. Sit enim $ABNFEM$ cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quam ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit PHQ columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens H & altitudinem GH. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata $AMEC$, $BNFD$ convexa eſt in ſuperficie interna AME, BNF verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna PHQ con-



convexa erit versus cataractam, & propterea major Cono cujus basis est circellus ille PQ & altitudo GH, id est, major tertia parte Cylindri eadem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere Coni seu tertiæ partis Cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, minor est pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est HG. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium Sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est HG. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maxime directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi PQ in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem vero sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem Sphæroidis sit infinite velocior quam ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus PQ eo acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, seu duabus tertiis partibus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo GH. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est ponderi Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium Arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproxime.

LEMMA

De Motu Corporum

LEMMA IV.

Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia Circuli eadem diametro deſcripti & eadem velocitate ſecundum lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minime opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in Circulum vertitur.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim qua totus ejus motus interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime.

Nam ſi vas *ABDC* fundo ſuo *CD* ſuperficiem aquæ ſtagnantis tangat, & aqua ex hoc vaſe per canalem Cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam ſtagnantem effluat, locetur autem Circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet exceſſus orificii canalis *EF* ſupra circellum *PQ* ad circulum *AB*: manifeſtum eſt (per Caſ. 5, Caſ. 6, & Cor. 1. Prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere poteſt.



Et

Et (per Cor. 10, Prop. xxxvi) ſi vaſis latitudo ſit infinita, ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in fluido undique compreſſo & aſcenſu ſuo cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis qua præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut $EFq - PQq$ ad EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati qua ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius, per Legum Cor. 5, id eſt, Reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea Velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt, Reſiſtentia vero ejus æqualis evadet ponderi Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, a qua Cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hac velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem Cylindri, hac velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum Reſiſtentia circelli per Lemma IV; ideoque æqualis eſt Vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproxime.

Si

De Motu Corporum

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; adeoque Vis illa qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & Vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad Vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime. *Q.E.D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, continuum vero eſſe & non elaſticum ut preſſio omnis quæ ab ejus compreſſione oritur propagetur in inſtanti &, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & Reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ oritur a compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certe Actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac Propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quam in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinite velocior ſit quam motus corporis preſſi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Mediorum.

Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed Cylindrus in Medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: Reſiſtentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$

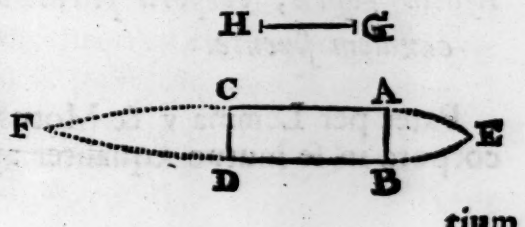
ſemel

ſemel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione denſitatis Medii ad denſitatem Cylindri.

Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq ſemel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: reſiſtentia Cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri.

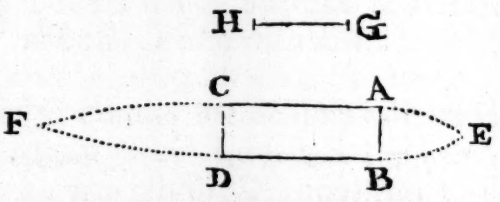
Scholium.

In hac Propoſitione reſiſtentiam inveſtigavimus quæ oritur a ſola magnitudine tranſverſæ ſectionis Cylindri, neglecta reſiſtentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo Propoſitionis xxxvi, obliquitas motuum quibus partes aquæ in vaſe, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hac Propoſitione, obliquitas motuum quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes Cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur & reſiſtentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vaſe diminuit, id eſt, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia tranſirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vaſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hac Propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum Cylindro, & ſola maneat reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum Cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & ſint AE & BE arcus duo Parabolici axe AB deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpa-



De Motu Corporum.

tium HG, describendum a Cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus Cylindri motus, interea dum longitudo $4AC$ motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas Fluidi habet ad densitatem Cylindri quamproxime. Et hac vi Resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.



LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphæroides, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis Cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam spatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per Lemma v & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex Lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his Lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & Medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de alte immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt Aer, quam in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in Fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi quamproxime.

Nam Globus eſt ad Cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria; & propterea Vis illa, quæ tollere poſſit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus deſcribat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet interea dum Globus deſcribat duas tertias partes hujus longitudinis, id eſt, octo tertias partes diametri propriæ. Reſiſtentia autem Cylindri eſt ad hanc Vim quamproxime ut denſitas Fluidi ad denſitatem Cylindri vel Globi, per Prop. XXXVII; & Reſiſtentia Globi æqualis eſt Reſiſtentiæ Cylindri, per Lem. V, VI, VII. *Q.E.D.*

Corol. 1. Globorum, in Mediis compreſſis infinitis, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & duplicata ratione denſitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum Globus, vi ponderis ſui comparativi, in fluido reſiſtente poteſt deſcendere, ea eſt quam acquirere poteſt Globus idem, eodem pondere, abſque reſiſtentia cadendo & caſu ſuo deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias partes diametri ſuæ ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi. Nam Globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſita, deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit quo tempore Globus octo tertias diametri ſuæ eadem velocitate deſcribit, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi: ideoque per hanc Propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi Reſiſtentiæ, & propterea Globum accelerare non poteſt.

Corol. 3. Data & denſitate Globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in qua Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

Corol.

Corol. 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem Corol. 7.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per Fluidum in canali Cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum Globi, & ratione denſitatis Fluidi ad denſitatem Globi quamproxime.

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII; procedit vero demonſtratio quemadmodum in Propoſitione præcedente.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in Medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per Phænomena.

Sit A pondus Globi in vacuo, B pondus ejus in Medio reſiſtente, D diameter Globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{8}{3}$ D ut denſitas Globi ad denſitatem Medii, id eſt, ut A ad A − B, G tempus quo Globus pondere B abſque reſiſtentia cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam Globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum Globus, pondere ſuo B, in Medio reſiſtente poteſt deſcendere, per Corol. 2, Prop. XXXVIII; & reſiſtentia quam Globus ea cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia vero quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam G, per Corol. 1, Prop. XXXVIII.

Hæc

De Motu Corporum

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea vero quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur Globus ut pondere ſuo B in Fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit Logarithmo $0{,}434294481 \frac{2P}{G}$, ſitque L Logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}386294361\,1F + 4{,}605170186\,LF$. Si Fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus $4{,}605170186\,LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}386294361\,1\,F$ altitudo deſcripta quamproxime. Patent hæc per Libri ſecundi Propoſitionem nonam & ejus Corollaria, ex Hypotheſi quod Globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in Fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui Tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta, exiſtente 2F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maxima deſcripta. Numeri in quarta columna ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum $1{,}3862944 - 4{,}6051702\,L$, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus a corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido*	*Spatia cadendo descripta in fluido*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001 G	99999$\frac{22}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	99999999$\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

Scholium.

Ut reſiſtentias Fluidorum inveſtigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{12}{36}$ uncias libræ hujus ſeu grana 253$\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645

132,645 in Medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{11}{38}$ *gran*, & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua eſt $79\frac{11}{38}$ *gran*. Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2 F, quod proinde erit 4,4256 *dig*. Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{11}{38}$, cadendo in vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, abſque reſiſtentia cadendo in aqua deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicata ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig*. ad 95,219 *dig*, deſcribet 2,2128 *dig*. & velocitatem maximam H acquiret quacum poteſt in aqua deſcendere. Eſt igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus deſcribet ſpatium 2 F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 3,0676 *dig*. & manebit ſpatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod Globus cadendo in aqua in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per Theoriam deſcribere debuit quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres Globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $51\frac{5}{16}$ granorum in aqua, ſucceſſive demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aqua tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{1}{12}$ *gran*, excessus hujus ponderis supra pondus in aqua $71\frac{17}{48}$ *gran*, diameter globi 0,81296 *dig*, octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig*, spatium 2 F 2,3217 *dig*, spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran*, tempore 1″, absque resistentia cadendo describat 12,808 *dig*, & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran*. descendere, tempore 0″,301056 describet spatium 2,3217 *dig*. & tempore 15″ spatium 115,678 *dig*. Subducatur spatium 1,3862944 F seu 1,609 *dig*. & manebit spatium 114,069 *dig*. quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0,895 *dig*. circiter. Et sic manebit spatium 113,174 *dig*. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per Experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 *gran*. in aere & 1 *gran*. in aqua, successive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, vel bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aqua, vel denique minori proportioni resistentiæ quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis, tribuendum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cæpi ut investigarem resistentias fluidorum antequam Theoria, in Propositionibus proxime præcedentibus exposita, mihi innotesceret. Postea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, Globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{3}{7}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi absque resistentia cadendo describit 9,88164 *dig.* Et tempus G $0''$,376843. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore $0''$,376843 describit spatium 2,8066 digitorum, & tempore $1''$ spatium 7,44766 digitorum, & tempore $25''$ seu oscillationum 50 spatium 186,1915 *dig.* Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 *dig.* & manebit spatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproxime.

Exper.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet, primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas, globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit ſemper a latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit, & recedendo appropinquat lateribus vaſis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſus. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{1}{4}$ in aqua, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum

non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{1}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam vero cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{1}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{22}{32}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{1}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{1}{8}$ in aqua, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc Experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum; & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aqua ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur a fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem a tergo relinquent, niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (per Prop. XXXII & XXXIII) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Con-

Congruit igitur Theoria cum phænomenis corporum cadentium in Aqua, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Eccleſiæ *Sti Pauli*, in urbe *Londini*, globi duo vitrei ſimul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo huic Tabulæ impoſiti ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum, ut Tabula polis ferreis ſolummodo innixa ſuper iiſdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum ferreum a peſſulo ad imam Eccleſiæ partem tendens, dimitteretur & oſcillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in Tabula ſequente.

Globorum mercurio plenorum.			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″½
983	0,8	4 −	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8¼
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi*) minutis quatuor ſecundis deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda ſua devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto, tempora quibus globi ſex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Glo-

De Motu Corporum

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore $8''\ 12'''$, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis, eſt 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{1}{10}$ *gran*; ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{1}{10}$ *gran*; & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{1}{10}$ ad $19\frac{1}{10}$, & ita ſunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{1}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore $57'''\ 58''''$, & velocitatem maximam acquirit quacum poſſit in aere deſcendere. Hac velocitate globus, tempore $8''\ 12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore $8''\ 12'''$, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit vero ſpatium 220 pedum per Experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

Globorum pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220.	*Spatia deſcribenda per Theoriam.*	*Exceſſus*
510 *gran.*	5,1 *dig.*	$8''\ 12'''$	226 *ped.* 11 *dig.*	6 *ped.* 11 *dig.*
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

Globorum igitur tam in Aere quam in Aqua motorum reſiſtentia prope omnis per Theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In Scholio quod Sectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in Aere, Aqua, & Argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. Idem hic oſtendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in Aere & Aqua. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam Penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in Scholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum Aqua, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in Aere, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam in hac ſeptima Sectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas Aquæ ſit ad denſitatem Aeris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in Aere, Aqua, & Argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ a cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his Mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis recte exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium $\frac{2}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 7, Prop. xxxv. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quod figura Globi paulo aptior ſit ad motum quam figura Cylindri eadem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis Aer, Aqua, Argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent Media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de qua agitur in Propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium, diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ cui reſiſtentia, de qua hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia Cœleſtia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in omnes partes liberrime & abſque omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in Mediis infinite fluidis quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſua, non tantum motum ciet in fluido, ſed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido, eſt ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in Æthere ſubtiliſſimo pro denſitate Ætheris, quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

SECTIO

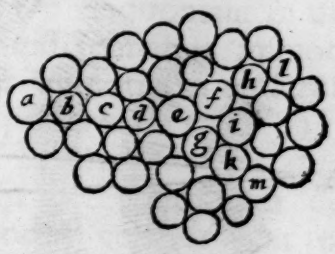
SECTIO VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

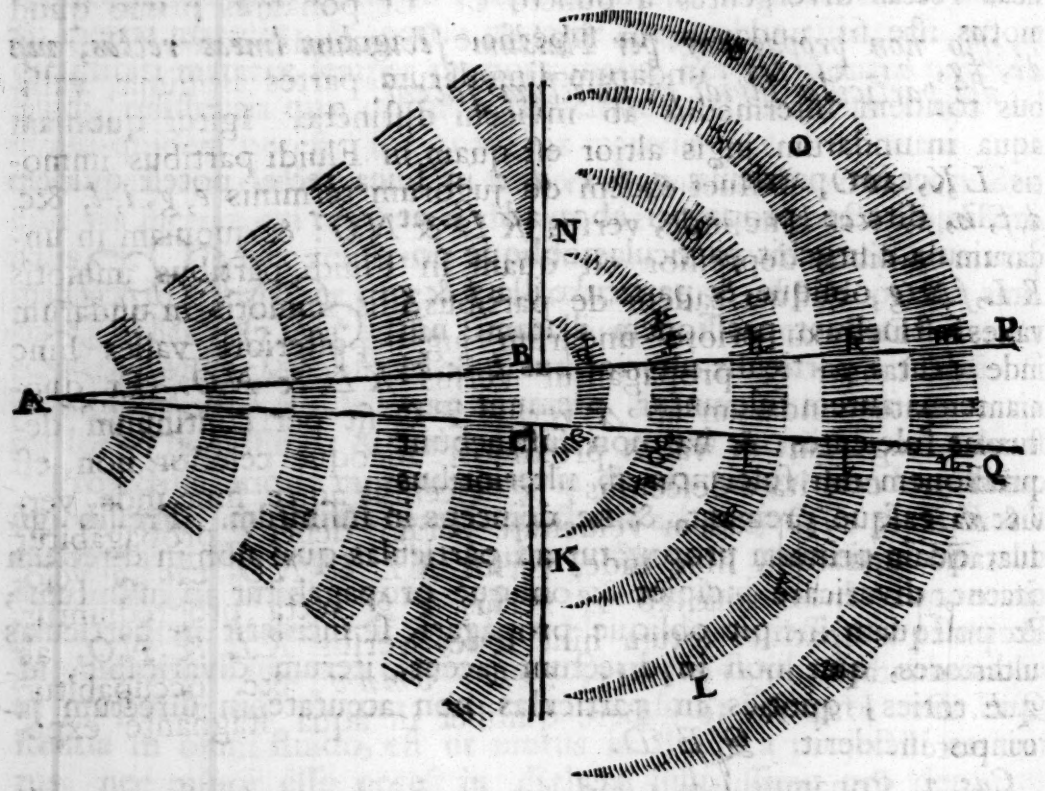
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, poteſt quidem preſſio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique poſitas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit oblique propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si preſſionis, a dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* tranſit. Planis tranſverſis *de*, *fg*, *hi* diſtinguatur conus *APQ* in fruſta; & interea dum conus *ABC*, preſſionem propagando, urget fruſtum

De Motu Corporum.

ſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus Legem tertiam) quod fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique.



Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q.E.D.*

PRO-

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

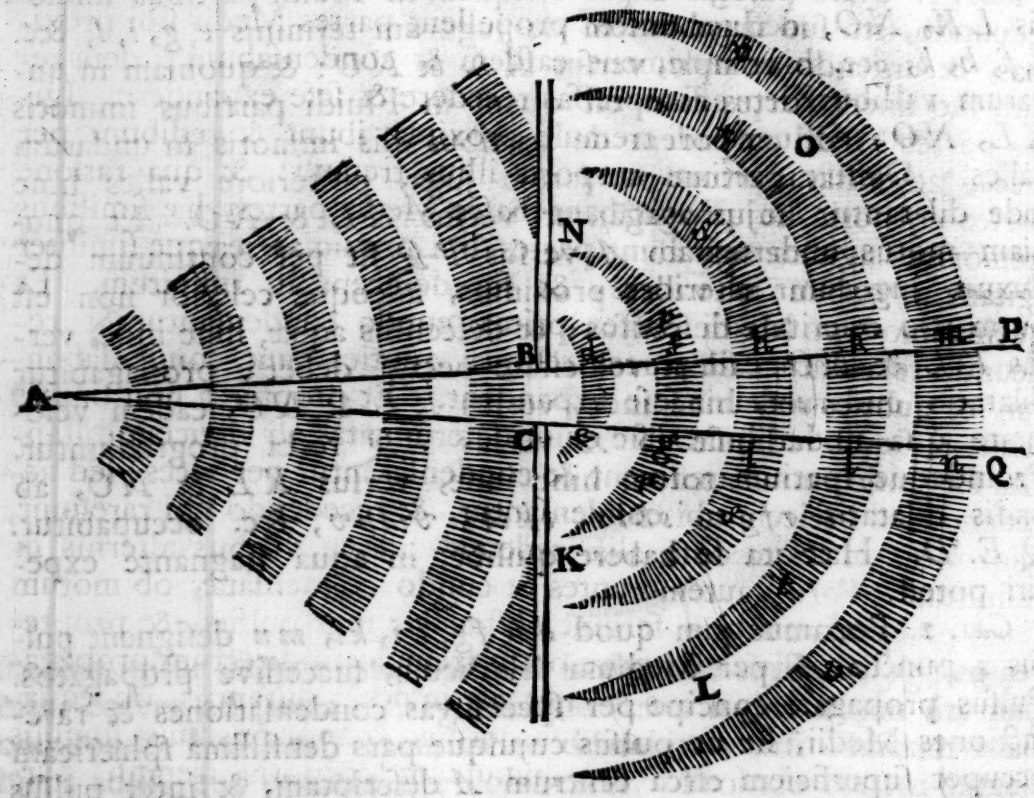
Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque (ſi fieri poteſt) in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in Fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde, verſus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in Fluidi partibus immotis *KL*, *NO*, defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ, hinc inde, verſus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum, hinc inde, verſus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde, verſus *KL* & *NO*, ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aqua ſtagnante experiri poteſt.

Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus a puncto *A*, per Medium Elaſticum, ſucceſſive propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones Medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla;

De Motu Corporum

eoque pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem fere celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem fere celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q.E.D.* Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppoſitis, quam a feneſtra directe propagati, quantum ex ſenſu judicare licet.



Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſint, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur:

muntur: recedent eædem verſus Medii partes omnes quieſcentes, tam laterales KL & NO, quam anteriores PQ, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen BC tranſiit, dilatari incipiet & abinde, tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in Medio vero non Elaſtico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus

rei

De Motu Corporum

rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas Undarum supplet locum vis Elasticæ.

Cas. 2. Quod si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q.E.D.*

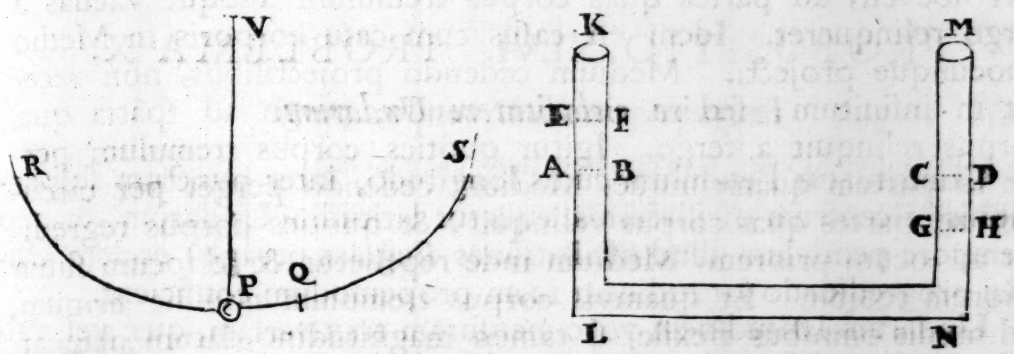
Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad pressionem, per Medium ambiens, secundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium Flammæ, sed a totius dilatatione derivari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aquæ in Canalis cruribus erectis K L, M N *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus Pendulum oscillatur.*

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando; & resistentiam aquæ quæ oritur

oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure KL aſcendit ad altitudinem EF, deſcenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum ſuſpenſionis, $SPQR$ Cyclois quam Pendulum deſcribat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur



& retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL aſcendit ad EF, & in crure altero deſcendit ad GH, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut AE ſeu PQ ad VP ſeu PR. Vis etiam, qua pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in Cycloide, (per Corol. Prop. LI.) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia PQ a loco infimo P, ad Cycloidis longitudinem PR. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia AE, PQ deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi aqua & pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis, tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicata.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicata ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum Undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, Unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, adeoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q.E.I.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproxime.

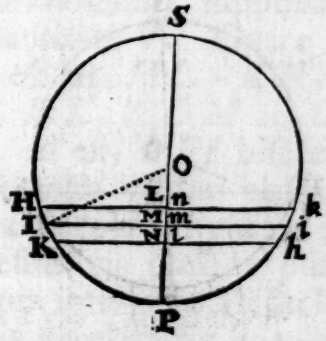
Corol. 2.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod partes aquæ recta aſcendunt vel recta deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propoſitione non niſi quamproxime definitum eſſe affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

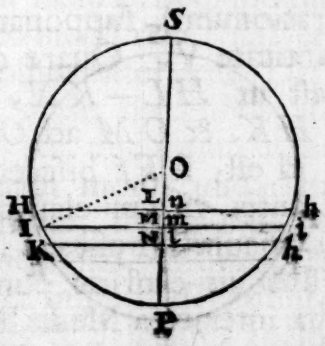
Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.

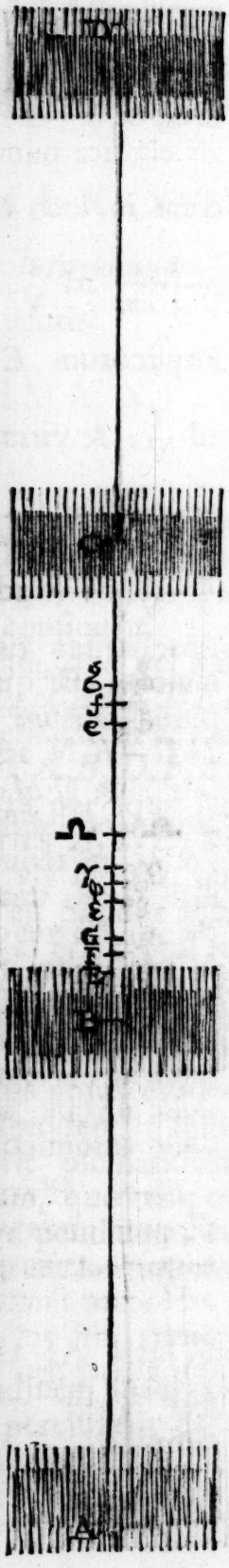


Deſignent *AB, BC, CD*, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; *ABC* plagam motus pulſuum ab *A* verſus *B* propagati; *E, F, G* puncta tria Phyſica Medii quieſcentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem diſtantias ſita; *Ee, Ff, Gg*, ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF, FG* lineolas Phyſicas ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca εφ, φγ & *ef, fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, ſi demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *Eε* æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Phyſicum *E* reperiatur

in ε. Hac lege punctum quodvis *E*, eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E*, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulsuum intervallum totum *BC*. Et demissis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a *B* ad *C*; si *PH* vel *PHSh* sit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel *PHSi* tempus ab initio motus puncti *F*, & *PK* vel *PHSk* tempus ab initio motus puncti *G*; & propterea *Eε*, *Fφ*, *Gγ* erunt ipsis *PL*, *PM*, *PN* in itu punctorum, vel ipsis *Pl*, *Pm*, *Pn* in punctorum reditu, æquales respective. Unde *εγ* seu *EG*+*Gγ*−*Eε* in itu punctorum æqualis erit *EG*−*LN*, in reditu autem æqualis *EG*+*ln*. Sed *εγ* latitudo est seu expansio partis Medii *EG* in loco *εγ*; & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem, ut *EG*−*LN* ad *EG*; in reditu autem ut *EG*+*ln* seu *EG*+*LN* ad *EG*. Quare cum sit *LN* ad *KH* ut *IM* ad radium *OP*, & *KH* ad *EG* ut circumferentia *PHShP* ad *BC*, id est (si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum *BC*) ut *OP* ad V; & ex æquo *LN* ad *EG*, ut *IM* ad V: erit expansio partis *EG* punctive Physici *F* in loco *εγ*, ad expansionem





panſionem mediocrem quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$, eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum Phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V, ſi modo (ob anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinite minores eſſe quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum Phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ,) eſt vis qua interjecta Medii lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$, eſt ut ipſius diſtantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt, lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q.E.D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari deſinunt.

De Motu Corporum

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe & ſubduplicata ratione denſitatis inverſe; ſi modo Fluidi vis Elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verum tamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro Phyſice accurata haberi poteſt. Sunt autem vires Elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes, itus & reditus ſuos per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proxime præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo; & in eadem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata materiæ & ratione ſubduplicata ſpatii, atque adeo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ 3. In Mediis igitur denſitate & vi Elaſtica paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi Medii vel denſitas vel vis Elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus quo motus

tus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicata ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicata ratione vis Elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata denſitatis Medii inverſe & ratione ſubduplicata vis Elaſticæ directe. *Q. E. D.*

Hæc Propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis Medii denſitate & vi Elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri comprimi; ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica EF, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis P & S, a vi Elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}PS$ ſeu PO ad longitudinem A. Sed vis Elaſtica qua lineola Phyſica EG, in locis ſuis extremis P, S exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII) ad ejus vim totam Elaſticam ut $HL - KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; adeoque ex æquo, vis qua lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, nam HK erat ad EG ut

PO

De Motu Corporum.

PO ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elaſtica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, atque adeo ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & ſubduplicata ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt quam acquirunt Gravia, æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſita, pulſus percurret ſpatium quod erit æquale toti altitudini A, adeoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut Fluidi vis Elaſtica directe & denſitas ejuſdem inverſe; velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione denſitatis inverſe & ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant Propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſola

(per

(per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{4}$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700 longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{1}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aeris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aeris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aeris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aeris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aeris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979 quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aeris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aere latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aeris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus

De Motu Corporum

tus ille celerius propagabitur per ſolum aerem verum, idque in ſubduplicata ratione minoris materiæ. Ut ſi Atmoſphæra conſtet ex decem partibus aeris veri & una parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aeris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aer per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aer per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicata ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo, conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognita ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Invenit utique *D. Sauveur* (factis a ſe experimentis) quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ tempore minuti unius ſecundi centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; adeoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde verſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus a corporibus ſonoris, quam cum proxime abſumus, patet ex Corollario Propoſitionis XLVII Libri hujus. Sed & cur ſoni in Tubis ſtenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus a cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in Tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo ſingulis recurſibus impreſſo, magis augetur. Et hæc ſunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO

SECTIO IX.

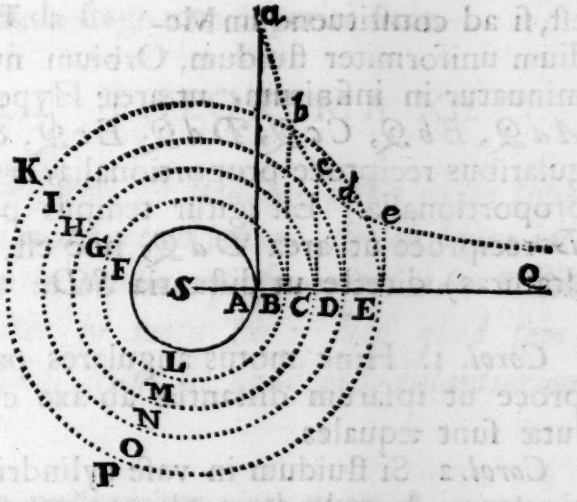
De motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

REſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes Fluidi ſeparantur ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

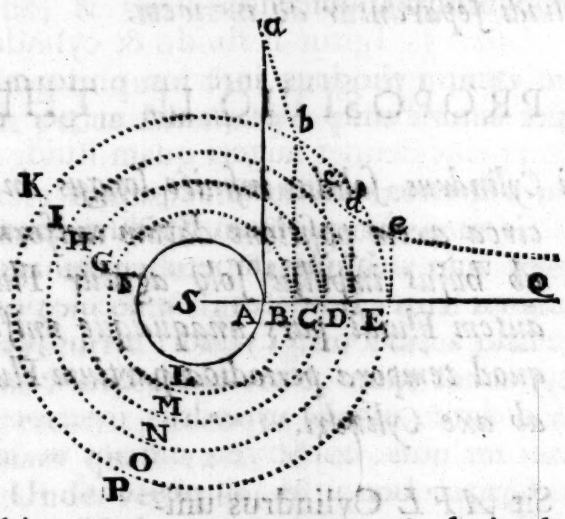
Si Cylindrus ſolidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem, perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium Fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri.



Sit *AFL* Cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur Fluidum in Orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum, impreſſiones contiguorum Orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in Orbem aliquem major eſt vel

De Motu Corporum

minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut quadrata distantiarum inverse. Quare si ad infinitæ rectæ $SABCDEQ$ partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id est, si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, Orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciproce ut area DdQ, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut distantia SD. $Q.E.D.$



Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciproce ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum

tionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi Syſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quam fluidi partes ſingulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecus impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in Aqua profunda ſtagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si Sphæra ſolida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem; perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro Sphæræ.

Cas. 1. Sit *AFL* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c.

De Motu Corporum

distinguatur Fluidum in Orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem Orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impessio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $SABCDE\mathcal{Q}$ partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum Orbis cujusvis DIO reciproce ut area DdQ, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut quadratum distantiæ SD. Id quod volui primo demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe Orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet

a Globo

a Globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est; neque adeo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta æquatorem; tardiores acceleraretur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro Globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q.E.D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quam ad Polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia quæ ad Eclipticam est, recedat semper à centro & per exteriora Vorticis migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione

one

De Motu Corporum.

one perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eaque actione ſervant quantitatem motus ſui plane invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies Vortici concentricas nunquam acceleratur, eo quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem Vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Abſque tali principio neceſſe eſt ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in Vorticem: & primo revolveretur hic Vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. aſſignatam) & Vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli, eadem ratione qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones Vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in Corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem

poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in Vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in Vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro Vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus, erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi Syſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motus in Corollariis 8. 9 & 10. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis

motibus

De Motu Corporum

motibus revolvebantur, permittatur Syſtema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & Syſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, adeoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignata. Si figura vaſis non ſit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius a centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio Vorticum innoteſcit per Propoſitionis hujus Corollarium ſextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione Phænomena cœleſtia per Vorti-

Vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt, quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utriſque quam accuratiſſime, quatenus obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidere. Ideoque ſi Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, niſi vel materia Vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat a centro, vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea eſt in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ (niſi graves ſint in centrum) circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi Demonſtrationum gratia Hypotheſin talem initio Sectionis hujus propoſuerim ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione quam ea velocitatis eſt. Quo conceſſo, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quod ſi Vortices (uti aliquorum eſt opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius uſque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio ſeſquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. Viderint itaque Philoſophi quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per Vortices explicari poſſit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipſius partibus (quoad velocitatem & curſus determinationem) moventur.

Nam ſi Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: &

contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo Vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum sit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quam prius; adeoque Vorticis vim illam, qua prius in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro & revolvendo describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relative quiescit in fluido cui innatat.

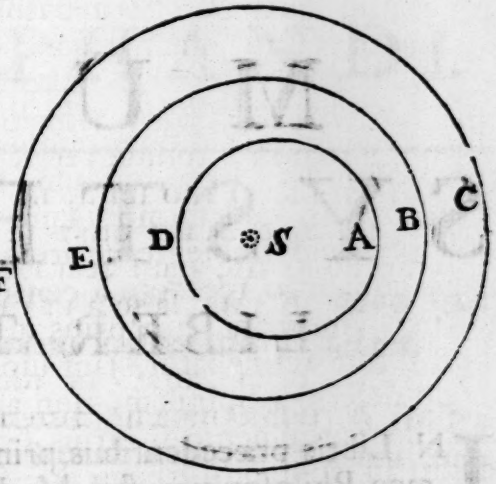
Corol. 2. Et si Vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro Vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, Orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A*, *B* & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in Orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C*

velocius

velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relative quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quam in principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo vero motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.



DE

MUNDI SYSTEMATE

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maxime ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi Scholiis quibuſdam Philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maxime fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus Principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent quibus a multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more Mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui Principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematice doctis moram nimiam injicere poſſint, author eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

REGULÆ

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ ſint & earum Phænomenis explicandis ſufficiant.

Dicunt utique Philoſophi: Natura nihil agit fruſtra, & fruſtra fit per plura quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque Effectuum naturalium ejuſdem generis eædem ſunt Cauſæ.

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtia; deſcenſus lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis Lucis in Terra & in Planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt, ideoque generales ſtatuendæ ſunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem ſomnia temere confingenda non ſunt, nec a Naturæ analogia recedendum eſt, cum ea

De Mundi Systemate

ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur, Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, & vis inertiæ totius, oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuo contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe ex Mathematica certum eſt. Utrum vero partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc Regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus Cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus.

PHÆNO-

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

CONstat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquiplicata ratione semidiametrorum Orbium consentiunt Astronomi; & idem ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum Jovialium tempora periodica.

$1^d.18^h.27'.34''$. $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

Distantiæ Satellitum a centro Jovis.

Ex observationibus	1	2	3	4	
Borelli.	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	} Semidiam. Jovis
Townlei *per Microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini *per Telescop.*	5	8	13	23	
Cassini *per Eclips. Satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{21}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	

PHÆNOMENON II.

Planetas Circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satelli-

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d.21^h.19'$. $2^d.17^h.41'$. $4^d.15^h.47'$. $15^d.22^h.41'$. $79^d.22^h.4'$.

Diſtantiæ Satellitum a centro Saturni in ſemidiametris Annuli.

Ex obſervationibus	$1\frac{12}{10}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis	1,95.	2,5.	3,52,	8,09.	23,71.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus ſuis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plena facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt, dimidiata è regione Solis, falcata cis Solem; per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibboſa in quadraturis, certum eſt quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicata mediocrium diſtantiarum à Sole.

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive Sol circa Terram, ſive Terra circa Solem revolvatur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſime ex Obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula ſequente videre licet.

Plane-

Planetarum ac Telluris diſtantiæ mediocres à Sole.

	☽	☿	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis Mercurii & Veneris a Sole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes Satellitum Jovis. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas deſcribere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu Terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprime demonſtratur per Eclipſes Satellitum, quibus Eclipſibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem deſcribere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias in hiſce Phænomenis negligo.

De Mundi Systemate

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

PAtet pars prior Propoſitionis per Phænomenon primum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon primum, & Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon ſecundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Phænomenon quintum, & Propoſitionem ſecundam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon quartum; & Propoſitionem quartam ejuſdem Libri. Accuratiſſime autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PRO-

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe ſuo reſpicere Terram, & eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per Phænomenon ſextum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod ſi diſtantia Lunæ a centro Terræ ſit ad ſemidiametrum Terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur ſit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciproce ut ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ partibus $59\frac{1}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Actio Solis quatenus Lunam diſtrahit a Terra, eſt ut diſtantia Lunæ a Terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) eſt ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta Solis vi tantilla, vis reliqua qua Luna retinetur in Orbe erit reciproce ut D^2. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua Luna retinetur in Orbe, augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata ſemidiametri Terræ ad mediocrem diſtantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad ſuperficiem Terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem Terræ, perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi ſemper a motu rectilineo, & in Orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris a Terra in Syzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum pleroſque Aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, & ſecundum *Tychonem*

chonem $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & Lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti a *Gallis* menſurantibus definitum eſt: Et ſi Luna motu omni privari fingatur ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe ſuo retinetur, deſcendat in Terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propoſitionem XXXVI. Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter. Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inverſa, adeoque ad ſuperficiem Terræ major ſit partibus 60×60 quam ad Lunam; corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus noſtris vi gravitatis cadendo, deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$, uti *Hugenius* factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonſtravit: & propterea (per Reg. I. & II.) vis qua Luna in Orbe ſuo retinetur, illa ipſa eſt quam nos Gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi Gravitas ab ea diverſa eſt, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo, duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra Experientiam.

Calculus hic fundatur in hypotheſi quod Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna circum Solem moveantur, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: diſtantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

PRO-

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumſaturnios in Saturnum, & Circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in Orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumſaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Reg. 11. à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Saturno & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis (per motus Legem tertiam) mutua ſit, Jupiter in Satellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuo per Corol. 1. & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares, Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus tempo-

De Mundi Systemate

temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſime quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arena, Sale communi, Ligno, Aqua, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quam potui exacte) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & aeris reſiſtentiam omnino paria: Et paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant una & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis actio in totum Aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terreſtria ad uſque Orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Luna, adeoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus a Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus, in hac Terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole diſtantiis) Satelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate

titate materiæ ſuæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione ſubduplicata quam proxime; uti calculis quibuſdam initis inveni. Et ſi Satelles minus gravis eſſet in Solem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quam diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illa ſubduplicata. Igitur ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis eccentricitas fore valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accurate proportionalia. Aliqua autem ſunt per Corol. 1. & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque, ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maxime abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora Terreſtria, quæ apud nos ſunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera eſſent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra Experientiam.

Corol.

De Mundi Systemate

Corol. 2. Corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, & propterea per Reg. III. de universis affirmanda est. Si Æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Aristotelis*, *Cartesii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ, pro quantitate materiæ, quam maxime gravitant, & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specifice graviora sint, minime descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque absque poris rarefieri possint, Vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diversi est generis à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in recessu à Magnete decrescit in ratione distantiæ non duplicata, sed fere triplicata, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

PRO-

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde consequens est, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum Planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

De Mundi Systemate

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuo gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an vero quam proxime. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accurate obtineret, prope ſuperficiem Planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV. & LXXVI. Libri primi & ipſarum Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverſe; & pondera ad ſuperficies Planetarum, aliaſve quaſvis a centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc Propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum $16\frac{1}{4}$, Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, Satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circum Terram dierum 27, hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantia mediocri Veneris a Sole & cum elongationibus maximis heliocentricis Satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8′. $21\frac{1}{2}''$, Satellitis Hugeniani a centro Saturni 3′. 20″, & Lunæ a Terra 10′, computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter diſtantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ reſpective. Eſt enim parallaxis Solis ex obſervationibus noviſſimis quaſi 10″, & *Halleius* noſter per emerſiones Jovis & Satellitum e parte obſcura Lunæ,

Lunæ, determinavit quod elongatio maxima heliocentrica Satellitis extimi Jovialis a centro Jovis in mediocri Jovis a Sole distantia sit $8'.\ 21\frac{1}{2}''$, & diameter Jovis $41''$. Ex duratione Eclipseon Satellitum in umbram Jovis incidentium prodit hæc diameter quasi $40''$, atque adeo semidiameter $20''$. Mensuravit autem *Hugenius* elongationem maximam heliocentricam Satellitis a se detecti $3'.\ 20''$ a centro Saturni, & hujus elongationis pars quarta, nempe $50''$, est diameter annuli Saturni e Sole visi, & diameter Saturni est ad diametrum annuli ut 4 ad 9, ideoque semidiameter Saturni e Sole visi est $11''$. Subducatur lux erratica quæ haud minor esse solet quam $2''$ vel $3''$: Et manebit semidiameter Saturni quasi $9''$. Ex hisce autem & Solis semidiametro mediocri $16'.\ 6''$ computum ineundo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1077, 889 & 104. Unde, cum pondera æqualium corporum a centris Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis pondera diminuantur vel augeantur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiis 10000, 1077, 889, & 104 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 835, 525, & 410 respective. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terra sunt ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quam $10''$, debebit quantitas materiæ in Terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in Sphæras homogeneas sunt in superficiebus Sphærarum ut Sphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa applicata ad Sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 1077, 889, & 104, & pondera in eosdem ut 10000, 835, 525, & 410, & propterea densitates sunt ut 100, 78, 59, & 396. Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea

De Mundi Systemate

terea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quam Jupiter, & Jupiter quam Saturnus, & Terra quadruplo densior quam Sol. Nam per ingentem suum calorem Sol rarescit. Luna vero densior est quam Terra, ut in sequentibus patebit.

Corol. 4. Densiores igitur sunt Planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt Planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diversis utique distantiis a Sole collocandi erant Planetæ ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quam apud nos: & Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hac nostra; cum materia omnis densior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proxime.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus Planetarum in Cœlis diutissime conservari posse.

In Scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, libere movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentia Aeris amitteret motus sui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent.

rent. Eaque de causa Globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores sunt quam materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quam si tota ex aqua constaret; præsertim cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quam Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter paulo densior sit quam aqua, hic spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ partibus $13\frac{3}{4}$ levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui partibus 850 levior est quam aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit.

HYPOTHESIS I.

Centrum Systematis Mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro Systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper pro-

De Mundi Systemate

progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1033 ad 1, & diſtantia Jovis a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo ſupra ſuperficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 2411 ad 1, & diſtantia Saturni a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuo agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, a quo centrum Solis quam minime diſcedit, & a quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

PRO-

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro Solis; ſi Sol quieſceret & Planetæ reliqui non agerent in ſe mutuo, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per Prop. 1. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII Lib. I.) Actiones autem Planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus Planetarum in Ellipſibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam ſi motus iſti circa Solem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in Solem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1033; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni a Jove eſt ad diſtantiam Saturni a Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1033 ſeu 1 ad 204 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in ſingulis Planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem Aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem Orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2411}{25}$ ſeu 124986, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem

Jovis

De Mundi Systemate

Jovis in Solem ut 65 ad 124986 seu 1 ad 1923. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores, præterquam quod Orbis Terræ sensibiliter perturbatur a Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, Ellipsin circum Solem in umbilico positum percurrit, & radio ad Solem ducto areas in eadem temporibus proportionales describit, Terra vero circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & Orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Attamen a Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri. Quinimo Fixæ in omnes cæli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

Cum Planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem: horum Aphelia & Nodi quiescent, nisi quatenus a viribus Jovis, Saturni, & corporum superiorum turbentur. Et inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod horum Aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu fixarum, idque in proportione sesquiplicata distantiarum horum Planetarum a Sole. Ut si Aphelium Martis in annis centum conficiat 35′ in consequentia respectu fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient 18′. 36″, 11′. 27″, & 4′. 29″ respective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac Propositione.

PRO-

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire Orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum medie proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire Orbium Eccentricitates & Aphelia.

Problema conſit per Prop. XVIII. Lib. I.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam vero Lunæ, circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipſius ſemper reſpiciet, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde a Terra. Hæc eſt libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta eſt ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porro hæc ita ſe habere, ex Phænomenis manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes Planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit

De Mundi Systemate

aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (conſentientibus Aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi Terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, Maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Picartus menſurando arcum gradus unius & 22′. 55″ inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradus unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. Unde ambitus Terræ eſt pedum Pariſienſium 123249600, ut ſupra. Sed cum error quadringenteſimæ partis digiti, tam in fabrica inſtrumentorum quam in applicatione eorum ad obſervationes capiendas, ſit inſenſibilis, & in Sectore decempedali quo *Galli* obſervarunt Latitudines locorum reſpondeat minutis quatuor ſecundis, & in ſingulis obſervationibus incidere poſſit tam ad centrum Sectoris quam ad ejus circumferentiam, & errores in minoribus arcubus ſint majoris momenti : * ideo *Caſſinus* juſſu Regio menſuram Terræ per majora locorum intervalla aggreſſus eſt, & ſubinde per diſtantiam inter Obſervatorium Regium *Pariſienſe* & villam *Colioure* in *Rouſſillon* & Latitudinum differentiam 6gr. 18′, ſupponendo quod figura Terræ ſit Sphærica, invenit gradum unum eſſe hexapedarum 57292, prope ut *Norwoodus* noſter antea invenerat. Hic enim circa annum 1635, menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & obſervando differentiam Latitudinum 2gr. 28′, collegit menſuram gradus unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt, hexapedarum Pariſienſium 57300. Ob magnitudinem intervalli a *Caſſino* menſurati, pro menſura gradus unius in medio intervalli illius, id eſt, inter Latitudines 45gr. & 46gr. uſurpabo hexapedas 57292. Unde, ſi Terra ſit Sphærica, ſemidiameter ejus erit pedum Pariſienſium 19695539.

* Vide Hiſtoriam Academiæ Regiæ ſcientiarum anno 1700.

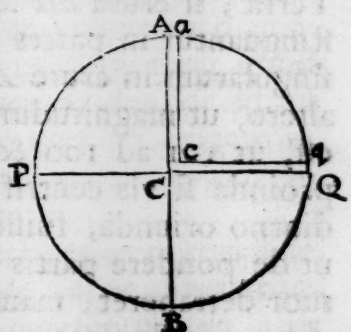
Penduli

Penduli in Latitudine *Lutetiæ Parisiorum* ad minuta secunda oscillantis longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{5}{9}$. Et longitudo quod grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus, in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit *Hugenius*) ideoque est pedum Parisiensium 15, dig. 1, lin. $2\frac{1}{18}$, seu linearum $2174\frac{1}{18}$.

Corpus in circulo, ad distantiam pedum 19695539 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens, tempore minuti unius secundi describit arcum pedum 1436,223, cujus sinus versus est pedum 0,05236558, seu linearum 7,54064. Ideoque vis qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centripetam corporum in Æquatore, a Terræ motu diurno oriundam, ut $2174\frac{1}{18}$ ad 7,54064.

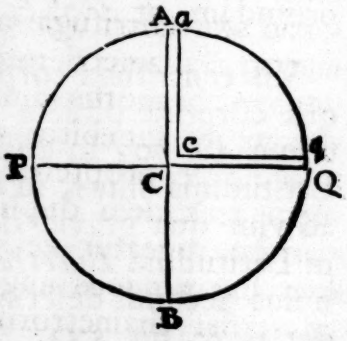
Vis centrifuga corporum in Æquatore, est ad vim centrifugam qua corpora directe tendunt a Terra in Latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′, in duplicata ratione Radii ad sinum complementi Latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, & corpus in Latitudine *Lutetiæ* vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describeret lineas 2177,32, seu pedes Parisienses 15, dig. 1, & lin. 5,32. Et vis tota gravitatis in Latitudine illa, erit ad vim centripetam corporum in Æquatore Terræ, ut 2177,32 ad 7,54064, seu 289 ad 1.

Unde si $APBQ$ figuram Terræ designet jam non amplius Sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem PQ genitam, sitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, a polo Qq ad centrum Cc, & inde ad Æquatorem Aa pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$, esse ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex Propositionis xci. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis PQ



De Mundi Systemate

ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in Sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram: propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem; & gravitas in A, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram, ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.



Jam cum (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum a centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars $\frac{1}{289}$.

Et

Et propterea dico, ſecundum Regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{503}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſima totius altitudinis: vis centriſuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter Terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Caſſini*, ſit pedum Pariſienſium 19695539, ſeu milliarium 3939 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) Terra altior erit ad Æquatorem quam ad Polos exceſſu pedum 85820, ſeu milliarum $17\frac{1}{6}$.

Si Planeta major ſit vel minor quam Terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et ſi denſitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & denſitates ut 5 ad 1: differentia diametrorum Jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{5}{1} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad 8 quamproxime. Eſt igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 9 ad 8 quamproxime, & propterea diameter inter polos eſt $35\frac{1}{2}''$. Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod uniformis ſit Planetarum materia. Nam ſi materia denſior ſit ad centrum quam ad circumferentiam; diameter quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Jovis vero diametrum quæ polis ejus interjacet minorem eſſe diametro altera *Caſſinus* dudum obſervavit, & Terræ diametrum inter polos minorem eſſe diametro altera patebit per ea quæ dicentur in Propoſitione ſequente.

PRO-

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter ſe comparare Pondera corporum in Terræ hujus regionibus diverſis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut diſtantiæ corporum a centro Terræ. Proinde ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut diſtantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciproce ut diſtantiæ locorum a centro; & propterea, ex Hypotheſi quod Terra Sphærois ſit, dantur proportione.

Unde tale conſit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, ſit quam proxime ut ſinus verſus Latitudinis duplicatæ, vel, quod perinde eſt, ut quadratum ſinus recti Latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum Latitudinis in Meridiano. Ideoque cum Latitudo *Lutetiæ Pariſiorum* ſit 48$^{gr.}$ 50′, ea locorum ſub Æquatore 00$^{gr.}$ 00′, & ea locorum ad Polos 90$^{gr.}$ & duplorum ſinus verſi ſint 11334, 00000 & 20000, exiſtente Radio 10000, & gravitas ad Polum ſit ad gravitatem ſub Æquatore ut 230 ad 229, & exceſſus gravitatis ad Polum ad gravitatem ſub Æquatore ut 1 ad 229: erit exceſſus gravitatis in Latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub Æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & in Latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & linearum 8$\frac{1}{2}$: longitudo penduli ſub Æquatore ſuperabitur a longitudine ſynchroni penduli *Pariſienſis*, exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo conſit Tabula ſequens.

Latitudo

Latitudo Loci	*Longitudo Penduli*		*Mensura Gradus unius in Meridiano*
Gr.	Ped.	Lin.	Hexaped.
0	3 ·	7,468	56909
5	3 ·	7,482	56914
10	3 ·	7,526	56931
15	3 ·	7,596	56959
20	3 ·	7,692	56996
25	3 ·	7,811	57042
30	3 ·	7,948	57096
35	3 ·	8,099	57155
40	3 ·	8,261	57218
1	3 ·	8,294	57231
2	3 ·	8,327	57244
3	3 ·	8,361	57257
4	3 ·	8,394	57270
45	3 ·	8,428	57283
6	3 ·	8,461	57296
7	3 ·	8,494	57309
8	3 ·	8,528	57322
9	3 ·	8,561	57335
50	3 ·	8,594	57348
55	3 ·	8,756	57411
60	3 ·	8,907	57470
65	3 ·	9,044	57524
70	3 ·	9,162	57570
75	3 ·	9,258	57607
80	3 ·	9,329	57635
85	3 ·	9,372	57652
90	3 ·	9,387	57657

Constat autem per hanc Tabulam, quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus Geographicis figura Terræ pro Sphærica haberi possit, quodque inæqualitas diametrorum Terræ facilius & certius per experimenta pendulorum deprehendi possit vel etiam per Eclipses Lunæ, quam per arcus Geographice mensuratos in Meridiano.

Hæc

De Mundi Systemate

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtat. Nam ſi materia ad centrum paulo denſior ſit quam ad ſuperficiem, differentiæ pendulorum & graduum Meridiani paulo majores erunt quam pro Tabula præcedente, propterea quod ſi materia ad centrum redundans qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter denſam, erit reciproce ut diſtantia ponderis a centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum diſtantiæ a materia illa quamproxime. Gravitas igitur ſub æquatore minor eſt in materiam illam redundantem quam pro computo ſuperiore: & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius aſcendet, & exceſſus longitudinum Pendulorum & graduum ad polos paulo majores erunt quam in præcedentibus definitum eſt.

Jam vero Aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes Aſtronomicas faciendas miſſi, invenerunt quod horologia oſcillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quam in regionibus noſtris. Et primo quidem *D. Richer* hoc obſervavit anno 1672 in inſula *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum Fixarum per meridianum menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu Solis, exiſtente differentia 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem Penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli *Pariſienſis* (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentia lineæ unius cum quadrante. At ex tarditate horologii oſcillatorii in *Cayenna*, differentia Pendulorum colligitur eſſe lineæ unius cum ſemiſſe.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Ste Hellenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit pluſquam octava parte digiti, ſeu linea una cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 *D. Varin* & *D. Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in Obſervatorio

vatorio Regio *Pariſienſi* eſſe ped. 3. lin. $8\frac{1}{9}$. Et in inſula *Gorea* eadem methodo longitudinem Penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{9}$, exiſtente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac *D. Couplet* filius anno 1697 menſe *Julio*, horologium ſuum oſcillatorium ad motum Solis medium in Obſervatorio Regio *Pariſienſi* ſic aptavit, ut tempore ſatis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyſſipponem* navigans invenit quod menſe *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, exiſtente differentia $2'.\ 13''$ in horis 24. Et menſe *Martio* ſequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium ſuum tardius ire quam *Pariſiis*, exiſtente differentia $4'.\ 12''$ in horis 24. Et affirmat Pendulum ad minuta ſecunda oſcillans brevius fuiſſe *Ulyſſipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Pariſiis*. Rectius poſuiſſet differentias eſſe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{1}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum $2'.\ 13''$, & $4'.\ 12''$ reſpondent. Craſſioribus hujus Obſervationibus minus fidendum eſt.

Annis proximis (1699 & 1700) *D. Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in inſulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſet paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in inſula *S. Chriſtophori* longitudo illa eſſet ped. 3. lin. $6\frac{1}{4}$, & quod in inſula *S. Dominici* eadem eſſet ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem Penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſe pedum trium Pariſienſium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id eſt, tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Pariſiorum*, ſed errante Obſervatione. Nam deinde ad inſulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli iſochroni eſſe pedum tantum trium Pariſienſium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* eſt $6^{gr.}\ 38'$ ad auſtrum, & ea *Portobeli* $9^{gr.}\ 33'$ ad boream, & Latitudines inſularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sti. Chriſtophori*, & *Sti. Dominici* ſunt reſpective $4^{gr.}\ 55'$, $14^{gr.}\ 40'$, $14^{gr.}\ 00'$, $14^{gr.}\ 44'$, $12^{gr.}\ 6'$, $17^{gr.}\ 19'$, & $19^{gr.}\ 48'$ ad boream. Et exceſſus longitudinis Penduli *Pariſienſis* ſupra longitudines Pendulorum iſochronorum in his latitudinibus obſervatas, ſunt paulo majores quam pro Tabula longitudinum Penduli ſuperius computata. Et propterea Terra aliquanto altior eſt ſub Æquatore quam pro ſuperiore cal-

De Mundi Systemate

culo, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem, niſi forte calores in Zona torrida longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Obſervavit utique *D. Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde *D. de la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi Soli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori Solis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus Aſtronomorum è *Gallia* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfecte congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub Æquatore quam in Obſervatorio Regio *Pariſienſi*, exiſtente differentia duarum circiter linearum ſeu ſextæ partis digiti. Per obſervationes *D. Richer* in *Cayenna* factas, differentia fuit lineæ unius cum ſemiſſe. Error ſemiſſis lineæ facile committitur. Et *D. des Hayes* poſtea per obſervationes ſuas in eadem inſula factas errorem correxit, inventa differentia linearum $2\frac{1}{18}$. Sed & per obſervationes in inſulis *Gorea*, *Guadaloupa*, *Martinica*, *Granada*, *S. Chriſtophori*, & *S. Dominici* factas & ad Æquatorem reductas, differentia illa prodiit haud minor quam $1\frac{13}{20}$ lineæ, haud major quam $2\frac{1}{2}$ linearum. Et inter hos limites quantitas mediocris eſt $2\frac{2}{40}$ linearum. Propter calores locorum in Zona torrida negligamus $\frac{2}{40}$ partes lineæ, & manebit differentia duarum linearum.

Quare cum differentia illa per Tabulam præcedentem, ex hypotheſi quod Terra ex materia uniformiter denſa conſtat, ſit tantum $1\frac{87}{1000}$ lineæ: exceſſus altitudinis Terræ ad æquatorem ſupra altitudinem ejus ad polos, qui erat milliarium $17\frac{1}{6}$, jam auctus in

ratione

ratione differentiarum, fiet milliarium $31\frac{2}{12}$. Nam tarditas Penduli ſub Æquatore defectum gravitatis arguit; & quo levior eſt materia eo major eſſe debet altitudo ejus, ut pondere ſuo materiam ſub Polis in æquilibrio ſuſtineat.

Hinc figura umbræ Terræ per Eclipſes Lunæ determinanda, non erit omnino circularis, ſed diameter ejus ab oriente in occidentem ducta major erit quam diameter ejus ab auſtro in boream ducta, exceſſu 55″ circiter. Et parallaxis maxima Lunæ in Longitudinem paulo major erit quam ejus parallaxis maxima in Latitudinem. Ac Terræ ſemidiameter maxima erit pedum Pariſienſium 19767630, minima pedum 19609820 & mediocris pedum 19688725 quamproxime.

Cum gradus unus menſurante *Picarto* ſit hexapedarum 57060, menſurante vero *Caſſino* ſit hexapedarum 57292: ſuſpicantur aliqui gradum unumquemque, pergendo per *Gallias* auſtrum verſus majorem eſſe gradu præcedente hexapedis plus minus 72, ſeu parte octingenteſima gradus unius; exiſtente Terra Sphæroide oblonga cujus partes ad polos ſunt altiſſimæ. Quo poſito, corpora omnia ad polos Terræ leviora forent quam ad Æquatorem, & altitudo Terræ ad polos ſuperaret altitudinem ejus ad æquatorem milliaribus fere 95, & pendula iſochrona longiora forent ad Æquatorem quem in Obſervatorio Regio *Pariſienſi* exceſſu ſemiſſis digiti circiter; ut conferenti proportiones hic poſitas cum proportionibus in Tabula præcedente poſitis, facile conſtabit. Sed & diameter umbræ Terræ quæ ab auſtro in boream ducitur, major foret quam diameter ejus quæ ab oriente in occidentem ducitur, exceſſu 2′. 46″, ſeu parte duodecima diametri Lunæ. Quibus omnibus Experientia contrariatur. Certe *Caſſinus*, definiendo gradum unum eſſe hexapedarum 57292, medium inter menſuras ſuas omnes, ex hypotheſi de æqualitate graduum aſſumpſit. Et quamvis *Picartus* in *Galliæ* limite boreali invenit gradum paulo minorem eſſe, tamen *Norwoodus* noſter in regionibus magis borealibus, menſurando majus intervallum, invenit gradum paulo majorem eſſe quam *Caſſinus* invenerat. Et *Caſſinus* ipſe menſuram *Picarti*, ob parvitatem intervalli menſurati, non ſatis certam & exactam eſſe judicavit ubi menſuram gradus unius per intervallum longe majus definire aggreſſus eſt. Differentiæ vero inter menſuras *Caſſini*, *Picarti*, & *Norwoodi* ſunt prope inſenſibiles, & ab inſenſibilibus obſervationum erroribus facile oriri potuere, ut Nutationem axis Terræ prætream.

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad poſitionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iſte nutandi perexiguus eſſet debet, & vix aut ne vix quidem ſenſibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes Lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis Principiis conſequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iiſque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna noſtra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, Orbemque habet minus curvum, atque adeo propius accedit ad Terram, in Syzygiis quam in Quadraturis, niſi quatenus impedit motus Eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima eſt (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis verſatur, & minima ubi idem in Quadraturis conſiſtit; & inde Luna in Perigæo velocior eſt & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quam in Quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7. & 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis ſuis, tardius regreditur in Quadraturis, & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quieſcunt in Syzygiis ſuis, & velociſſime regrediuntur in Quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio Terræ (per Corol. 6.

Prop. LXVI,) quam in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum obſervatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter Eccentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per Corol. 1. & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Aſtronomico, ad Proſthaphæreſin Lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi Lunarum ſeu Satellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis, eſt ad motum medium Nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujuſque in conſequentia, eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum, (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ reſpective, ut motus Nodorum & Augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum,

De Mundi Systemate

rum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum temporibus quibus Satelles & Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; adeoque in Satellite extimo non superat $5''.12'''$.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci, minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit, & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam

tertiam

tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt Octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in tranſitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita ſunt in Mari aperto. Nam in oſtiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἄκρους venient.

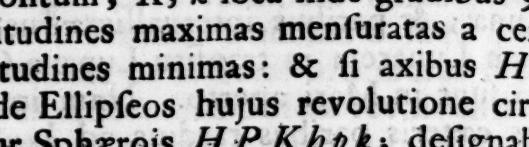
Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis a Terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in Syzygiis paulo majores ſint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & Luna in Perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam ante vel poſt dies quindecim, ubi in Apogæo verſatur. Vnde fit ut æſtus duo omnino maximi in Syzygiis continuis ſe mutuo non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius Declinatione ſeu diſtantia ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in Syzygiis Solſtitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum Solis Incidunt igitur æſtus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in Syzygiis comitatur ſemper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant Æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *ApEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei reſpondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum;

De Mundi Systemate

ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas menſuratas a centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur Ellipſis, deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur Sphærois *HPKhpk*; deſignabit hæc figuram Maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata Ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in ☌ hora tertia poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimo defluxus maximus in ☌ hora tertia poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemiſphæricos, unum in Hemiſphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hemiſphærio oppoſito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Auſtralem nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuo oppoſiti, veniunt per vices ad Meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Auſtrales magis Auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, Luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, & Luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ Nodus aſcendens verſatur in principio Arietis. Sic experientia compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & veſpertini tempore



pore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* vero altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proxime post Syzygias majores reddit, eosque proxime post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi a Syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti a Syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquille stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham*, sub latitudine

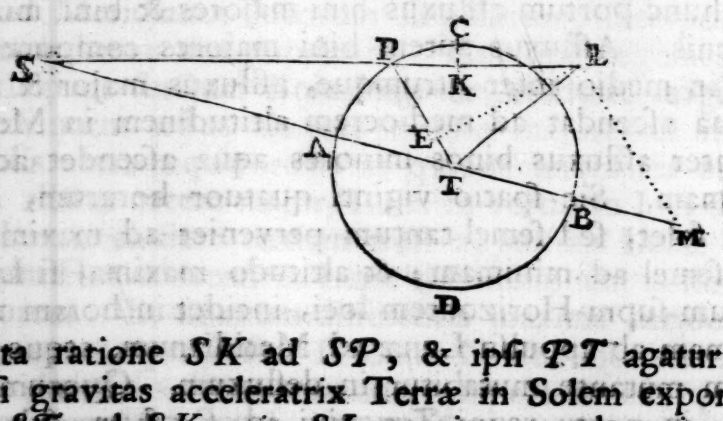
Boreali 20gr. 50'. *Halleius* ex Nautarum Obſervationibus pate-fecit. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per Æquatorem ſequente ſtagnat, dein Luna ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex a Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *PADB* orbem Lunæ. In *SP* capiatur *SK* æqualis *ST*; ſitque *SL* ad *SK*



in duplicata ratione *SK* ad *SP*, & ipſi *PT* agatur parallela *LM*; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem.

Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipſius SM pars TM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas TM & ML deſignare. Vis ML (in mediocri ſua quantitate) eſt ad vim centripetam, qua Luna in Orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam PT revolvi poſſet, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc eſt, in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{22}{40}$. Invenimus autem in Propoſitione quarta quod, ſi Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium Terræ quamproxime. Et vis qua Luna in Orbe circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, qua eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{22}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Vnde ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæ ſunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. *Q.E.I.*

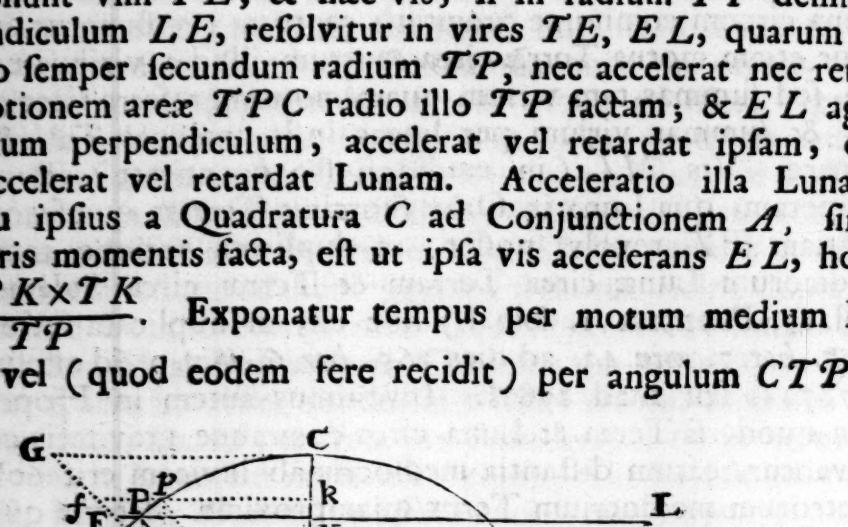
PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in Orbe circulari deſcribit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, ea ſola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero Solis diſtantiam, ponamus etiam lineas SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis LM reducetur ſemper

De Mundi Systemate

ad mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE, EL, quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius a Quadratura C ad Conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CTP, vel



etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipſi CT æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductaque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit Kk ad PK ut Pp ad Tp, hoc eſt in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut EL; & compoſite, area tota $GCKF$ ut ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in Lunam, atque adeo etiam ut velocitas hac

ſumma

ſumma genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CTP, ſeu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam TP, tempore ſuo periodico $CADBC$ dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in Orbe ſuo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demiſſum ſit ipſius EL pars tertia, & ipſius TP ſeu ML in Octantibus pars dimidia, vis EL in Octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim ML in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT ſeu TP. Exponatur vis maxima EL in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum TCG, ſive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915, ſumma $11915+50$ ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A, ac differentia $11915-50$ ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG (vel quod perinde eſt, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii TP, id eſt, ut Pd ad TP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris vere ſit dierum

De Mundi Systemate

rum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11913}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut $11023-50$ ad $11023+50$, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad $10973+Pd$, existente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219,46 & Sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ a Terra conjunctim; & propterea distantia Lunæ a Terra est in ratione composita ex subduplicata ratione Areæ directe & subduplicata ratione motus horarii inverse. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a Terra. Tentent Astronomi quam probe hæc Regula cum Phænomenis congruat.

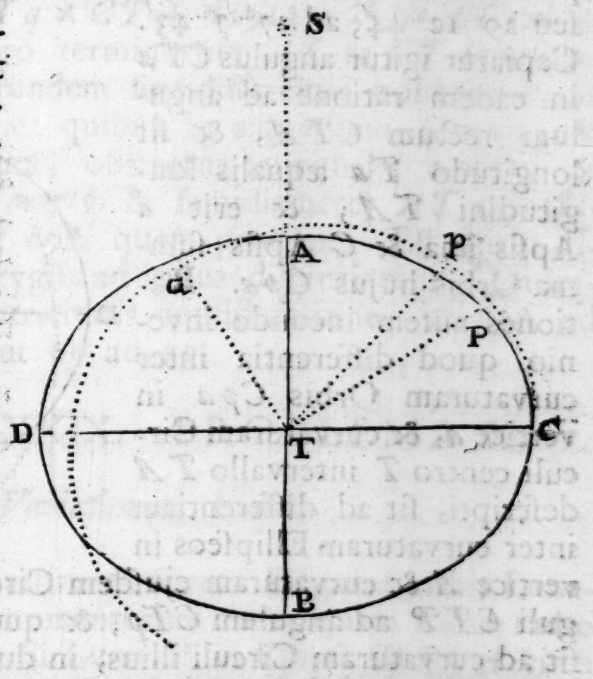
Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratius ex Phænomenis quam antehac definiri potest.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros Orbis in quo Luna, absque eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directe & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter

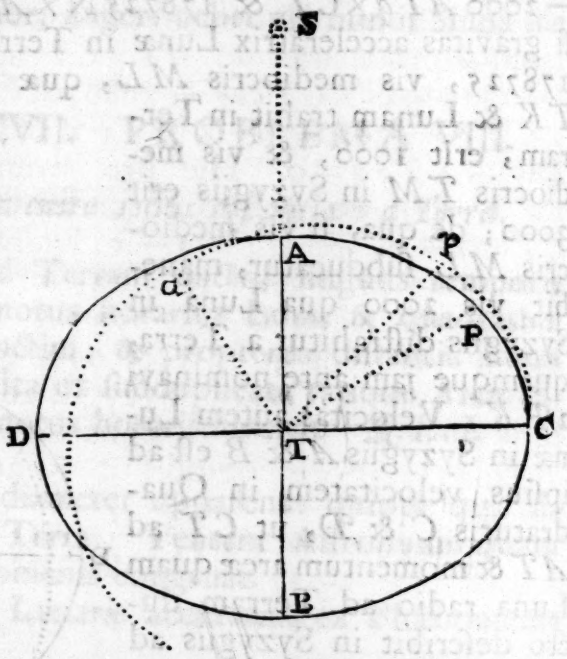
ter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem $2PK$ (Vide *Figur. pag.* 394.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris KT, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; seu ut $178725N \times CTq - 2000ATq \times CT$ & $178725N \times ATq + 1000CTq \times AT$. Nam si gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in Quadraturis est PT vel TK & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris TM in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur a Terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in Quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; i. e. ut $11073CT$ ad $10973AT$. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior semel directe, & fiet curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis ut $120406729 \times 178725ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000CTqq \times AT$, *i. e.* ut $2151969AT \times CT \times N - 24081AT$ *cub.* ad $2191371AT \times CT \times N + 12261CT$ *cub.*



Quoniam

De Mundi Systemate

Quoniam Figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro T Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria cujus curvaturam consideramus, describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit Figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura Cpa, cujus puncta singula p inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, & ducendo Tp æqualem TP, ea lege ut angulus PTp æqualis sit motui apparenti Solis a tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CTp sit ad angulum CTP ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu $29^{d.}\,12^{h.}\,44'$, ad $27^{d.}\,7^{h.}\,43'$. Capiatur igitur angulus CTa in eadem ratione ad angulum rectum CTA, & sit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a Apsis ima & C Apsis summa Orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam Orbis Cpa in vertice a, & curvaturam Circuli centro T intervallo TA descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli CTP ad angulum CTp; & quod curvatura Ellipseos in A sit ad curvaturam Circuli illius, in duplicata ratione TA ad TC; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC descripti, ut TC ad TA; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in C, in duplicata ratione TA ad TC; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice C & curvaturam Circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam Figuræ Tpa in vertice C & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli



anguli CTp ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter se collatis, prodit curvatura Figuræ Cpa in a ad ipsius curvaturam in C, ut $AT\,cub + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\,cub + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$, & $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$.

Igitur cum a designet Syzygiam Lunæ, & C ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\,CTqq - 2151969\,N \times CT\,cub + 368676\,N \times AT \times CTq + 36342\,ATq \times CTq - 362047\,N \times ATq \times CT + 2191371\,N \times AT\,cub + 4051{,}4\,ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT semisumma N scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resoluta, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde semidiameter CT fit 1,00719, & semidiameter AT 0,99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Est igitur distantia Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (sepositâ scilicet Eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

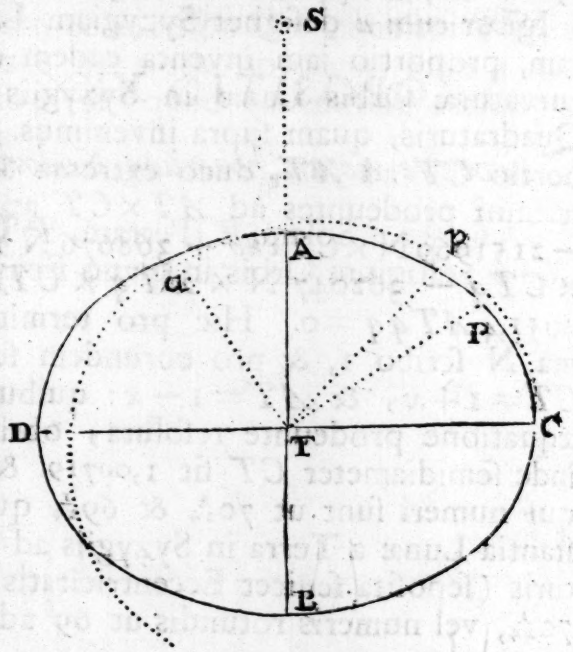
PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in Ellipsi $DBCA$ circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio TP ad Terram ducto describeret aream CTP tempori proportionalem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima CT ad semidiametrum minimam TA ut 70 ad 69: foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motus medii a Quadratura C computati, ut Ellipseos semidiameter TA ad ejusdem semidiametrum

De Mundi Systemate

TC seu 69 ad 70. Debet autem descriptio areæ CTP, in progressu Lunæ a Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in Quadratura sit ut quadratum sinus anguli CTP. Id quod satis accurate fiet, si tangens anguli CTP diminuatur in subduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli CTP jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus CTP in Octantibus, ubi motus medius est 45 gr. invenietur 44 gr. 27′. 28″. qui subductus de angulo motus medii 45 gr. relinquit Variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo a Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum CTA graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum CTa angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis Lunaris Synodicæ ad tempus revolutionis Periodicæ, id est, in ratione 29 d. 12 h. 44′. ad 27 d. 7 h. 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eadem ratione, & Variatio maxima quæ secus esset 32′. 32″, jam aucta in eadem ratione fit 35′. 10″.



Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantia Solis a Terra, neglectis differentiis quæ a curvatura Orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In aliis distantiis Solis a Terra, Variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis Synodicæ Lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione distantiæ Solis a Terra inverse. Ideoque in Apogæo

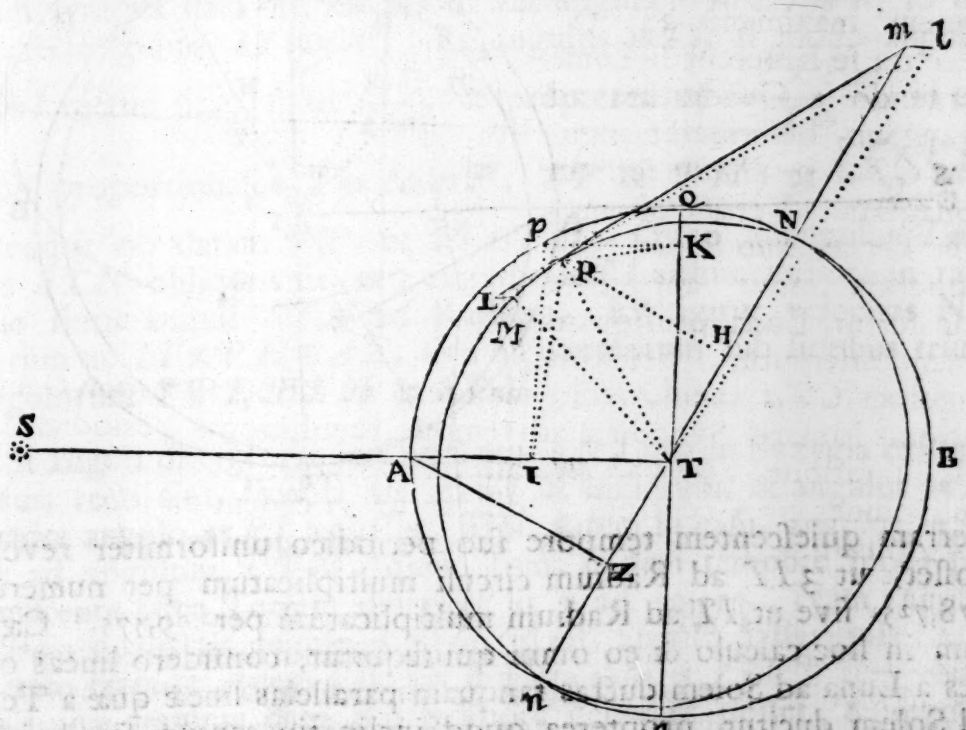
Apogæo Solis, Variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus Perigæo 37′. 11″, ſi modo Eccentricitas Solis ſit ad Orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{1}{2}$ ad 1000.

Hactenus Variationem inveſtigavimus in Orbe non eccentrico, in quo utique Luna in Octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſua diſtantia a Terra. Si Luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat a Terra quam ſi locaretur in hoc Orbe, Variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro Regula hic allata: ſed exceſſum vel defectum ab Aſtronomis per Phænomena determinandum relinquo.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

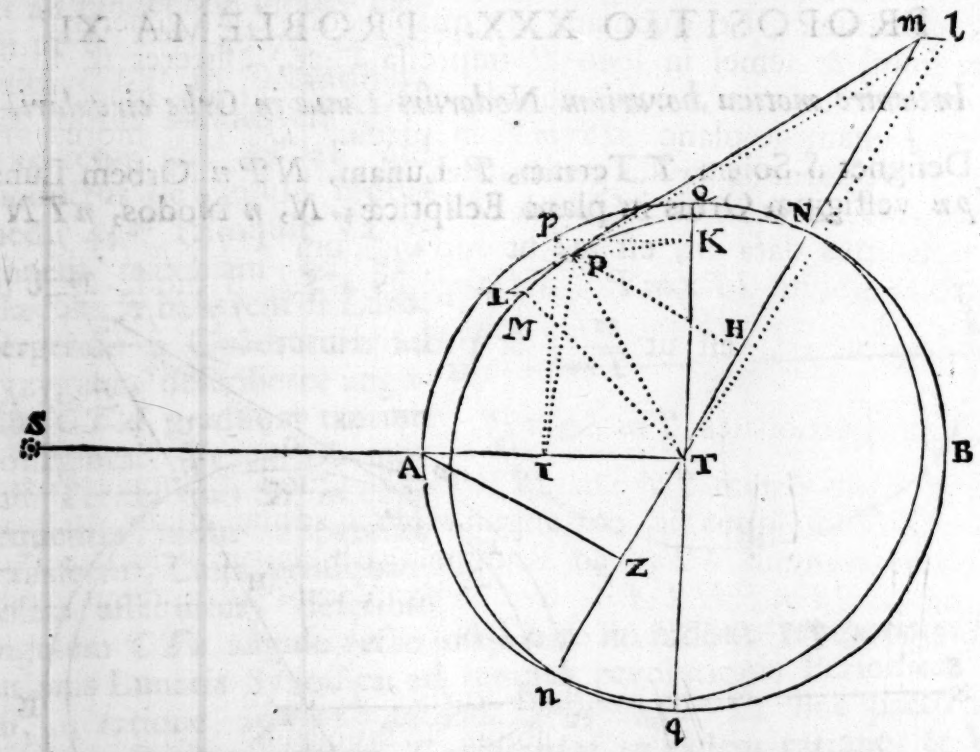
Deſignet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* veſtigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n* Nodos, *nTNm*



lineam Nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demiſſa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demiſſum in planum

De Mundi Systemate

Ecliptícæ ; Q, q Quadraturas Lunæ in plano Ecliptícæ, & pK perpendiculum in lineam Qq Quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ LM, altera lineæ MT proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, poſteriore in Solem ſecundum lineam rectæ ST a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior LM agit ſecundum planum orbis Lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT qua planum Orbis Lunaris perturbatur eadem eſt cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et hæc vis (per Prop. xxv.) eſt ad vim qua Luna in circulo circa



Terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut $3IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut IT ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes a Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantum auget in aliis ; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

De-

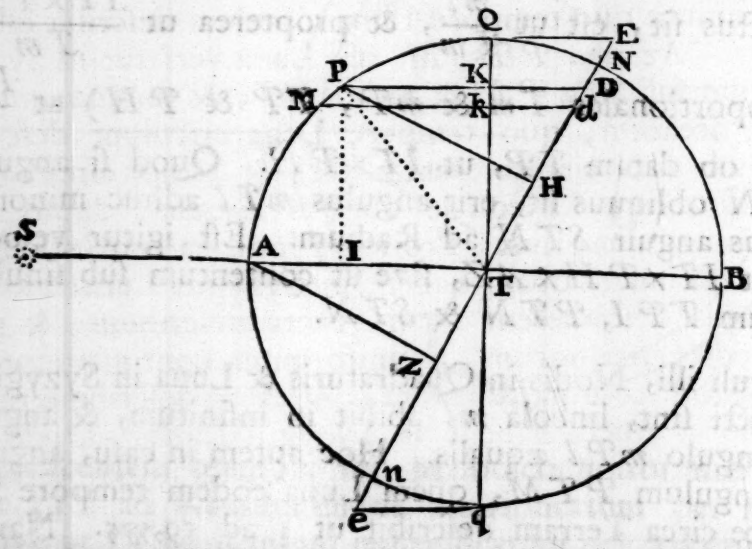
Deſignet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quam minimo deſcribit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata $3IT$, eodem tempore deſcribere poſſet. Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad m & l, ubi ſecent planum Eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela eſt plano Eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non poteſt, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea ſimilia erunt triangula LMP, Lmp. Jam cum MPm ſit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, ſi tota ſimul & ſemel in loco P impreſſa eſſet, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet LP, atque adeo transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis Nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo mTl. Eſt autem ml ad mP ut ML ad MP, adeoque cum MP ob datum tempus data ſit, eſt ml ut rectangulum $ML \times mP$, id eſt, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, ſi modo angulus Tml rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id eſt, (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod ſi angulus Tml, ſeu STN obliquus ſit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione ſinus anguli STN ad Radium. Eſt igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia exiſtentibus, recti ſint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in caſu, angulus mPl eſt ad angulum PTM, quem Luna eodem tempore motu ſuo apparente circa Terram deſcribit ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis eſt angulo LPM, id eſt, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem ſola vis præfata Solaris $3IT$ ſi tum ceſſaret Lunæ gravitas dato illo tempore generare poſſet; & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis Solaris $3IT$ eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut ſupra diximus,

De Mundi Systemate

mus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (respectu fixarum) sit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc casu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum sub sinubus angulorum trium TPI, PIN, & STN (seu distantiarum Lunæ a Quadratura, Lunæ a Nodo, & Nodi a Sole) ad cubum Radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam Quadraturas jungentem Qq demittantur perpendicula PK, Mk, eademque producantur donec secent lineam Nodorum Nn in D & d; erit motus horarius Nodorum ut area $MPDd$ & quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim



PK, PH & AZ prædicti tres sinus. Nempe PK sinus distantiæ Lunæ a Quadratura, PH sinus distantiæ Lunæ a Nodo, & AZ sinus distantiæ Nodi a Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Est autem PT ad PK ut PM ad Kk, adeoque ob datas PT & PM est Kk ipsi PK proportionalis. Est & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $\frac{PD \times AZ}{}$

$PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ\,qu.$ id est, ut area $PD\,dM$ & $AZ\,qu.$ conjunctim. *Q. E. D.*

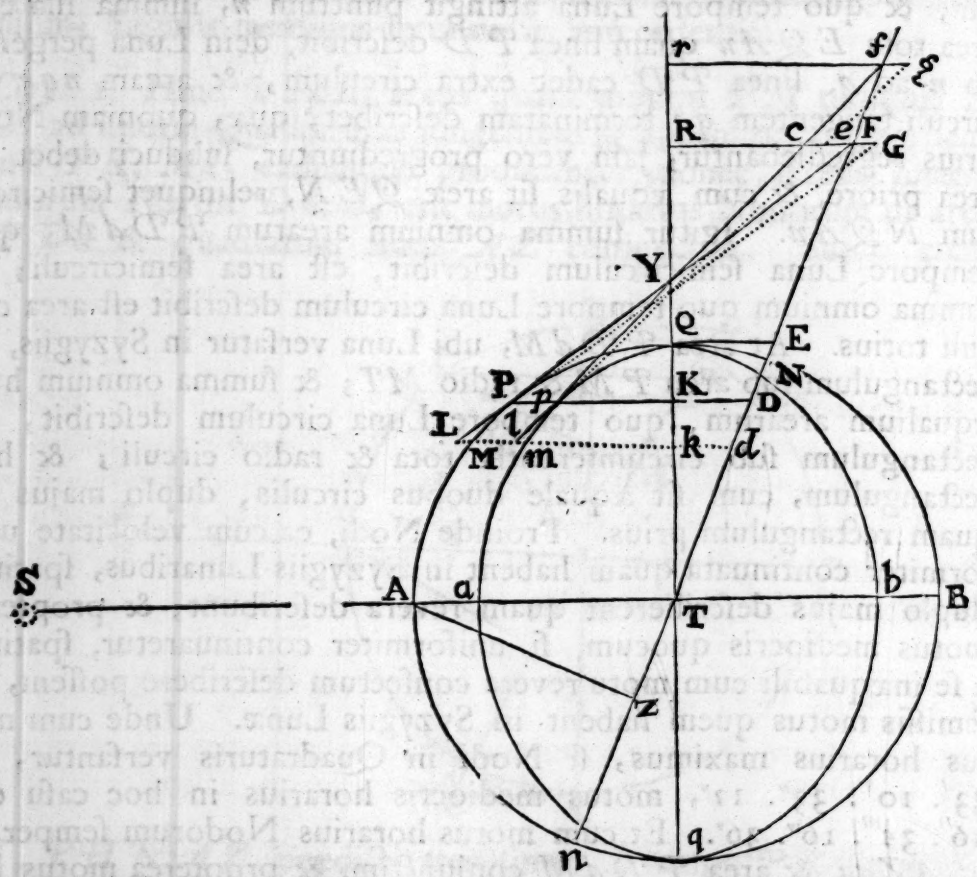
Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut quadratum sinus distantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut $AZ\,qu.$ ad $AT\,qu.$ Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq, summa omnium arearum $PD\,dM$, quo tempore Luna pergit a Q ad M, erit area $QM\,dE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein Luna pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de area priore, & cum æqualis sit areæ QEN, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PD\,dM$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area $PD\,dM$, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio MT; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde Nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quam revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut $AZ\,qu.$ & area $PD\,dM$ conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut $AZ\,qu.$ & area $PD\,dM$ conjunctim, id est (ob datam aream $PD\,dM$ in Syzygiis descriptam) ut $AZ\,qu.$ erit etiam motus mediocris ut $AZ\,qu.$ atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut $AZ\,qu.$ ad $AT\,qu.$ *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Designet *Qpmaq* Ellipsin, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAq* Circulum circumscriptum, *T* Terram in utriusque centro communi, *S* Solem, *p* Lunam in Ellipsi motam, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima describit, *N* & *n* Nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demissa & hinc inde producta, donec occurrant Circulo in *P* & *M*,



& lineæ Nodorum in *D* & *d*. Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area *pDdm*.

Nam si *PF* tangat Circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F*, & *pf* tangat Ellipsin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in

in f, conveniant autem hæ tangentes in axe $T\mathcal{Q}$ ad Υ; & ſi ML deſignet ſpatium quod Luna in Circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum $\mathcal{P}M$, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu tranſverſo deſcribere poſſet, & ml deſignet ſpatium quod Luna in Ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, deſcribere poſſet; & producantur $L\mathcal{P}$ & lp donec occurrant plano Eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta ſecet pf, pg & $T\mathcal{Q}$ in c, e & R reſpective, & fg producta ſecet $T\mathcal{Q}$ in r: Quoniam vis $3IT$ ſeu $3\mathcal{P}K$ in Circulo eſt ad vim $3IT$ ſeu $3pK$ in Ellipſi, ut $\mathcal{P}K$ ad pK, ſeu AT ad aT; erit ſpatium ML vi priore genitum, ad ſpatium ml vi poſteriore genitum, ut $\mathcal{P}K$ ad pK, id eſt, ob ſimiles figuras $\mathcal{P}\Upsilon Kp$ & $F\Upsilon Rc$, ut FR ad cR. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula $\mathcal{P}LM$, $\mathcal{P}GF$) ut $\mathcal{P}L$ ad $\mathcal{P}G$, hoc eſt (ob parallelas Lk, $\mathcal{P}K$, GR) ut pl ad pe, id eſt, (ob ſimilia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inverſe ut LM eſt ad lm, ſeu FR ad cR, ita eſt FG ad ce. Et propterea ſi fg eſſet ad ce ut $f\Upsilon$ ad $c\Upsilon$, id eſt, ut fr ad cR (hoc eſt, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id eſt, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & $f\Upsilon$ ad FT, foret fg ad FG ut $f\Upsilon$ ad FT; atque adeo anguli, quos FG & fg ſubtenderent ad Terram T, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus Nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum $\mathcal{P}M$, in Ellipſi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modo fg eſſet ad ce ut $f\Upsilon$ ad $c\Upsilon$, id eſt, ſi fg æqualis eſſet $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$. Verum ob ſimilia triangula fgp, cep, eſt fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem fg revera ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem FG ſubtendit, hoc eſt, motus Nodorum in Ellipſi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc fg ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg ſeu $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$, id eſt, ut $fp \times c\Upsilon$ ad $f\Upsilon \times cp$, ſeu fp ad $f\Upsilon$ & $c\Upsilon$ ad cp, hoc eſt, ſi ph ipſi TN parallela occurrat $F\mathcal{P}$ in h, ut Fh ad $F\Upsilon$ & $F\Upsilon$ ad $F\mathcal{P}$; hoc eſt, ut Fh ad $F\mathcal{P}$ ſeu $\mathcal{D}p$ ad $\mathcal{D}\mathcal{P}$, adeoque ut area $\mathcal{D}pmd$ ad aream $\mathcal{D}\mathcal{P}Md$. Et propterea, cum area poſterior

De Mundi Systemate

ſterior proportionalis ſit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipſi. *Q.E.D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum poſitione, ſumma omnium arearum $pDdm$, quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis m, ſit area $mpQEd$, quæ ad Ellipſeos tangentem QE terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integra, ſit area Ellipſeos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipſi erit ad motum mediocrem Nodorum in Circulo, ut Ellipſis ad Circulum; id eſt, ut Ta ad TA, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in Circulo ſit ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ ſi capiatur angulus $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}.$ ad angulum $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipſi ad $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}.$ ut AZq ad ATq; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodi a Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius deſcribit in Syzygiis quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in Octantibus eſt ad exceſſum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in ſingulis Orbis particulis æqualibus ſit reciproce ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad exceſſum temporis in Quadraturis, ac defectum in Syzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in Quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias, eſt in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit ſingulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum Luna per-

percurrit PM, (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, eſt quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadratura & ſemiſſem quadrati Radii ad ſemiſſem quadrati Radii, conjunctim. Unde ſi Nodi in Quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde diſtantia, & alia duo a Syzygia & Quadratura iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facile conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur) erat $32''.42'''.7^{iv}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud eſt $17'''.43^{iv}.11^{v}$, cujus pars quarta $4'''.25^{iv}.48^{v}$, motui horario mediocri ſuperius invento $16''.21'''.3^{iv}.30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''.16'''.37^{iv}.42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

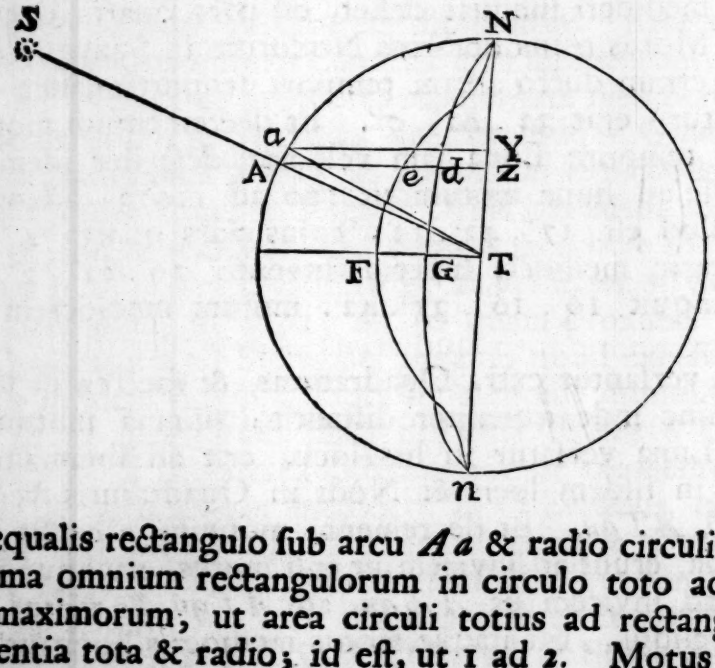
Si Nodi verſantur extra Quadraturas, & ſpectentur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum Nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi Luna in iiſdem locis & Nodi in Quadraturis verſantur, ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Et decrementa motuum, a cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum ſitu, ad $16''.16'''.37^{iv}.42^{v}$. ut $AZqu.$ ad $ATqu.$; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii.

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea vero Solem *S*, per motum Terræ, progredi a Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt, ut area *NAZ*. Eſt autem maxima



AZYa æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat $16''.16'''.37^{iv}.42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. *hor.* 6. *min.* 9. fit $39^{gr}.38'.7''.50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}.49'.3''.55'''$. eſt motus

tus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A, est ad $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''.$ ut area NAZ ad circulum totum.

Hæc ita se habent, ex Hypothesi quod Nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr.}\ 38'.\ 7''.\ 50'''$, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis N sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut AZq ad ATq: erit motus Solis ad motum Nodi in N, ut $360\,ATq$ ad $39{,}6355\,AZq$; id est, ut $9{,}0827646\,ATq$ ad AZq. Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo Sol percurrat particulam Aa, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciproce ut $9{,}0827646\,ATq$ ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum NA, exponatur per Sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa, exponatur per Sectoris particulam ATa; & (perpendiculo $a\Upsilon$ in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis ut sit rectangulum dZ in $Z\Upsilon$ ad Sectoris particulam ATa ut AZq ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut ATq ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$; rectangulum dZ in $Z\Upsilon$ designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit Curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus Sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $Aa\Upsilon Z$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$. Sic enim rectangulum eZ in $Z\Upsilon$ erit ad aream $AZ\Upsilon a$ ut decrementum temporis quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum e tangat

Curvam

De Mundi Systemate

Curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt Nodi motus quo tempore arcus totus NA, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam vero area ſemicirculi eſt ad aream Figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæſitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui reſpondet Circulo toti erat $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$; & propterea motus, qui Figuræ $NeFnT$ duplicatæ reſpondet, eſt $1^{gr.}\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore ſubductus relinquit $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum Nodi inter ſui ipſius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit $341^{gr.}\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum Solis inter eaſdem Conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum $360^{gr.}$ ut Nodi motus jam inventus $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. Hic eſt motus medius Nodorum in anno Sidereo. Idem per Tabulas Aſtronomicas eſt $19^{gr.}\ 21'.\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor eſt parte trecenteſima motus totius, & ab Orbis Lunaris Eccentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Eccentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

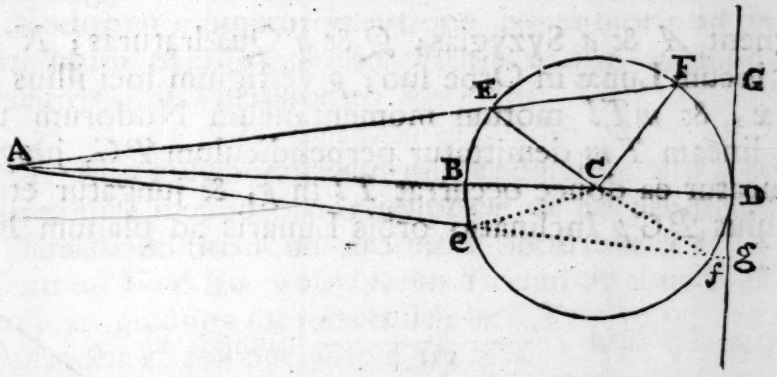
PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod eſt ut area $NTA - NdZ$, (*in Fig. præced.*) motus iſte eſt ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem Problematis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, (id eſt, ut $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$, atque adeo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr.}\ 31'.\ 2''.\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19'^{gr.}\ 49.\ 3''.\ 55'''$) hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{1}{10}$ dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ diſtantiæ Solis a loco Nodi, per motum medium invento;

&

& agatur AE vel AF secans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui sit ad motum totum Nodi inter ipsius Syzygias (id est, ad $9^{gr.}\ 11'.\ 3''.$) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus DAG usurpari potest) ad motum medium Nodorum addatur ubi Nodi



transeunt a Quadraturis ad Syzygias, & ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a Syzygiis ad Quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA-NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio annua motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime necessaria est. Nam cum Variatio Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri annuæ, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

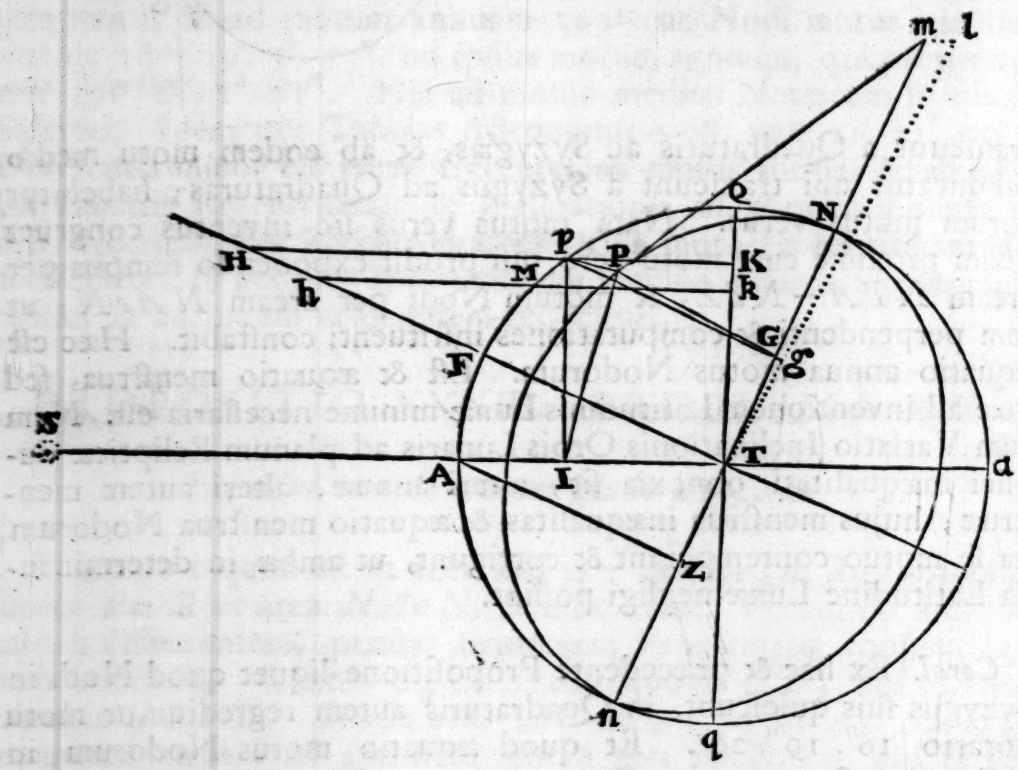
Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''.\ 19'''.\ 26^{iv}.$ Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit $1^{gr.}\ 30'$. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probe quadrant.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire Variationem horariam Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Designent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe suo; *p* vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* Inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ,



ubi Luna versatur in *P*; & angulus *Pgp* Inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; adeoque angulus *GPg* Variatio momentanea Inclinationis. Est autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg*, ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus *GTg* (per Propos. xxx.) sit ad angulum $33''.10'''.33^{iv}$. ut

IT ×

$IT \times PG \times AZ$ ad $AT\,cub$, erit angulus GPg (ſeu Inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub$. *Q.E.I.*

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod Luna in Orbe Circulari uniformiter gyratur. Quod ſi Orbis ille Ellipticus ſit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſupra expoſitum eſt. Et in eadem ratione minuetur etiam Inclinationis Variatio.

Corol. 1. Si ad Nu erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT; ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea Inclinationis Variatio horaria ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub$.

Corol. 2. Ideoque ſi Terra & Nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore menſis illius foret ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genitarum, & ſub ſignis propriis $+$ & $-$ conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\,cub$. id eſt, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\,cub$. hoc eſt, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT\,quad$.

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum ſitu, Variatio mediocris horaria, ex qua per menſem uniformiter continuata Variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4\,AT$, id

De Mundi Systemate

est (cum Pp sit ad PG ut sinus Inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ sit ad $4AT$ ut sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam Inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub.$ id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est, spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, seu $5878''$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est, si Inclinatio sit $5^{gr.}\ 1'$, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est $163''$, seu $2'.\ 43''$.

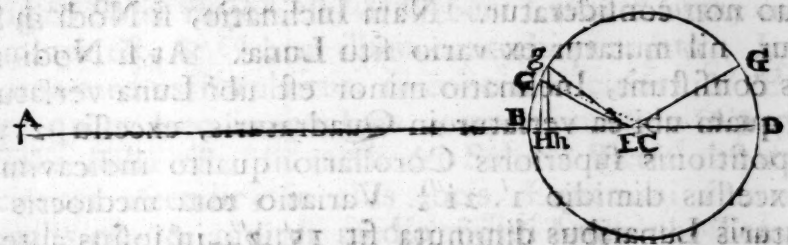
PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Ecliptiæ.

Sit AD sinus Inclinationis maximæ, & AB sinus Inclinationis minimæ. Bisecetur BD in C, & centro C, intervallo BC, describatur Circulus BGD. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$: Et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Qua-

Quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam Nodorum à Quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg, ob datum



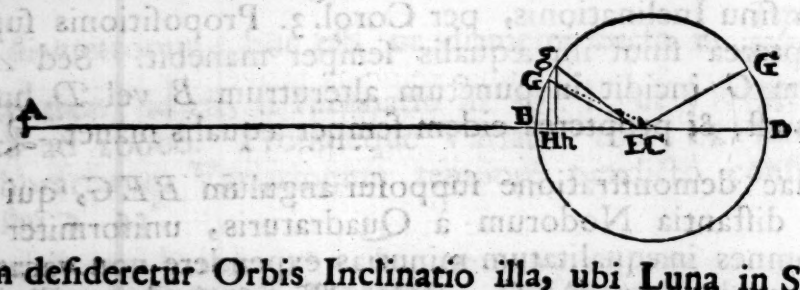
angulum GEg, erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$, id eſt, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus Inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu Inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q.E.D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis Variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33'' \cdot 10''' \cdot 33^{iv}$. ut contentum ſub Inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris Inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum Inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 400000, ſive ut 224 ad 100000. Eſt autem Variatio tota, ſinuum differentiæ BD reſpondens, ad Variationem illam horariam ut diameter BD ad

De Mundi Systemate

arcum Gg; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota BD ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde Variatio illa BD prodibit $16'.\ 23''\frac{1}{2}$.

Hæc est Inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam Inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, Inclinatio minor est ubi Luna versatur in Syzygiis, quam ubi ea versatur in Quadraturis, excessu $2'.\ 43''$; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$. Variatio tota mediocris BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipsius autem Syzygiis aucta fit $17'.\ 45''$. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'.\ 45''$: adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit $5^{gr.}\ 17'.\ 20''$; eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit $4^{gr.}\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus.



Si jam desideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut sinus graduum $4.\ 59'.\ 35''$ ad sinum graduum $5.\ 17'.\ 20''$, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit AH sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatio, ubi Luna distat $90^{gr.}$ à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scho-

Scholium.

Hiſce motuum Lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus Lunares, per Theoriam Gravitatis, a cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem Theoriam inveni præterea quod Æquatio Annua medii motus Lunæ oriatur a varia dilatatione Orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major eſt, & Orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor eſt, & Orbem illum contrahi permittit. In Orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & Æquatio Annua per quam hæc inæqualitas compenſatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla eſt, in mediocri Solis a Terra diſtantia ad 11′. 50″ circiter aſcendit, in aliis locis Æquationi centri Solis proportionalis eſt; & additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab Aphelio ſuo ad Perihelium, & in oppoſita Orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium Orbis magni 1000 & Eccentricitatem Terræ $16\frac{7}{8}$, hæc Æquatio ubi maxima eſt, per Theoriam Gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed Eccentricitas Terræ paulo major eſſe videtur, & aucta Eccentricitate hæc Æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit Eccentricitas $16\frac{1}{16}$, & Æquatio maxima erit 11′. 52″.

Inveni etiam quod in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi Lunæ velocius moventur quam in Aphelio ejus, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Et inde oriuntur Æquationes Annuæ horum motuum Æquationi centri Solis proportionales. Motus autem Solis eſt in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe, & maxima centri Æquatio quam hæc inæqualitas generat, eſt 1gr. 56′. 26″ prædictæ Solis Eccentricitati $16\frac{1}{16}$ congruens. Quod ſi motus Solis eſſet in triplicata ratione diſtantiæ inverſe, hæc inæqualitas generaret Æquationem maximam 2gr. 56′. 9″. Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, ſunt ad 2gr. 56′. 9″, ut motus medius diurnus Apogæi & motus medius diurnus Nodorum Lunæ ſunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit Æquatio maxima medii motus Apogæi 19′. 52″: & Æquatio maxima medii motus Nodorum 9′. 27″. Additur vero Æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi Terra pergit a Perihelio ſuo ad Aphelium: & contrarium fit in oppoſita Orbis parte.

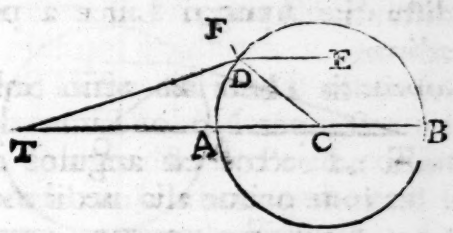
Per

Per Theoriam Gravitatis conſtitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major ſit ubi tranſverſa diameter Orbis Lunaris tranſit per Solem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea Terram & Solem jungente: & propterea Orbis Lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris, pendens a ſitu Apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima eſt cum Apogæum Lunæ verſatur in Octante cum Sole; & nulla cum illud ad Quadraturas vel Syzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu Apogæi Lunæ a Solis Quadratura ad Syzygiam, & ſubducitur in tranſitu Apogæi a Syzygia ad Quadraturam. Hæc Æquatio quam Semeſtrem vocabo, in Octantibus Apogæi quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri Solis diſtantia a Terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione diſtantiæ Solis inverſe, adeoque in maxima Solis diſtantia eſt 3′. 34″, & in minima 3′. 56″ quamproxime: ubi vero Apogæum Lunæ ſitum eſt extra Octantes, evadit minor; eſtque ad Æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ a proxima Syzygia vel Quadratura ad radium.

Per eandem Gravitatis Theoriam actio Solis in Lunam paulo major eſt ubi linea recta per Nodos Lunæ ducta tranſit per Solem, quam ubi linea ad rectos eſt angulos cum recta Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motus Lunaris Æquatio, quam Semeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi Nodi in Solis Octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in Syzygiis vel Quadraturis, & in aliis Nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ Nodi alterutrius a proxima Syzygia aut Quadratura: additur vero medio motui Lunæ dum Nodi tranſeunt a Solis Quadraturis ad proximas Syzygias, & ſubducitur in eorum tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas; & in Octantibus ubi maxima eſt, aſcendit ad 47″ in mediocri Solis diſtantia a Terra, uti ex Theoria Gravitatis colligo. In aliis Solis diſtantiis hæc Æquatio, in Octantibus Nodorum, eſt reciproce ut cubus diſtantiæ Solis a Terra, ideoque in Perigæo Solis ad 45″ in Apogæo ejus ad 49″ circiter aſcendit.

Per eandem Gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum Sole Quadraturam facit. Et Eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9.

7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & Æquationem principalem Apogæi generant, quam Semeſtrem vocabo. Et Æquatio maxima Semeſtris eſt 12 gr. 18′ circiter, quantum ex Obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter Lunam in Ellipſi circum Terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum Ellipſeos in Epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in Epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu Apogæi & quantitate Eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris Lunæ a Terra in partes 100000, & referat T Terram & TC Eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut ſit CB ſinus Æquationis maximæ Semeſtris 12 gr. 18′ ad radium TC, & circulus BDA centro C intervallo CB deſcriptus, erit Epicyclus ille in quo centrum Orbis Lunaris locatur & ſecundum ordinem literarum BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ ſemel æquato, & erit CTD Æquatio



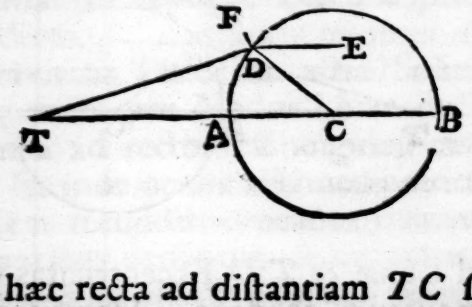
Semeſtris Apogæi Lunæ & TD Eccentricitas Orbis ejus in Apogæum ſecundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & Eccentricitate, ut & Orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in Orbe & diſtantia ejus a Terra, idque per Methodos notiſſimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum Orbis Lunæ velocius movetur circum centrum C quam in Aphelio, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ob Æquationem centri Solis in Argumento annuo comprehenſam, centrum Orbis Lunæ velocius movetur in Epicyclo BDA in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inverſe; ab Orbis centro D agatur recta DE verſus Apogæum Lunæ, ſeu rectæ TC parallela, & capiatur angulus EDF æqualis exceſſui Argumenti

De Mundi Systemate

menti annui prædicti ſupra diſtantiam Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in conſequentia; vel quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento Anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla Eccentricitas Orbis magni ad diſtantiam mediocrem Solis a Terra, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52'.27''.16'''$ ad $59'.8''.10'''$ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et concipe centrum Orbis Lunæ locari in puncto F, & in Epicyclo cujus centrum eſt D & radius DF interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentia circuli $DABD$. Hac enim ratione velocitas qua centrum Orbis Lunæ in linea quadam curva circum centrum C deſcripta movebitur, erit reciproce ut cubus diſtantiæ Solis a Terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris Lunæ a Terra ſit partium 100000, & Eccentricitas TC ſit partium 5505 ut ſupra: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{1}{4}$, & recta DF



partium $35\frac{4}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam TC ſubtendit angulum ad Terram quem tranſlatio centri Orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici Orbis Lunæ a Terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam Lunæ a Terra ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ, quique propterea Æquatio centri Secunda dici poteſt. Et hæc Æquatio in mediocri Lunæ diſtantia a Terra, eſt ut ſinus anguli quem recta illa DF cum recta a puncto F ad Lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima eſt evadit $2'.25''$. Angulus autem quem recta DF & recta a puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum EDF ab Anomalia media Lunæ, vel addendo diſtantiam Lunæ a Sole ad diſtantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis

Solis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″ ſunt ad Æquationem centri Secundam, addendam ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo, ſubducendam ſi major. Sic habebitur ejus Longitudo in ipſis Luminarium Syzygiis.

Si computatio accuratior deſideretur, corrigendus eſt locus Lunæ in Orbe ut ſupra inventus per Variationem duplicem. De Variatione Prima & principali diximus ſupra, hæc maxima eſt in Octantibus Lunæ. Variatio altera maxima eſt in Quadrantibus, & oritur a varia Solis actione in Orbem Lunæ pro varia poſitione Apogæi Lunæ ad Solem, computatur vero in hunc modum. Ut radius ad ſinum verſum diſtantiæ Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in conſequentia, ita angulus quidam P ad quartum proportionalem. Et ut radius ad ſinum diſtantiæ Lunæ a Sole, ita ſumma hujus quarti proportionalis & anguli cujuſdam alterius Q ad Variationem Secundam, ſubducendam ſi Lunæ lumen augetur, addendam ſi diminuitur. Sic habebitur locus verus Lunæ in Orbe, & per Reductionem loci hujus ad Eclipticam habebitur Longitudo Lunæ. Anguli vero P & Q ex Obſervationibus determinandi ſunt. Et interea ſi pro angulo P uſurpentur 2′, & pro angulo Q 1′, non multum errabitur.

Cum Atmoſphæra Terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, & refringendo ſpargat eandem in Umbram Terræ, & ſpargendo lucem in confinio Umbræ dilatat Umbram: ad diametrum Umbræ quæ per Parallaxim prodit, addo minutum unum primum in Eclipſibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

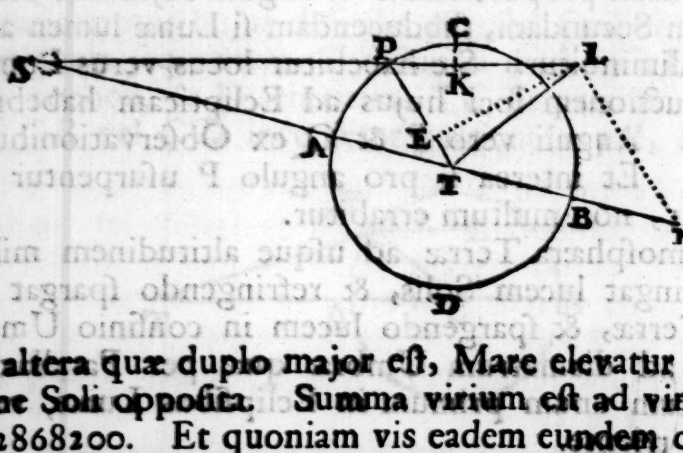
Theoria vero Lunæ primo in Syzygiis, deinde in Quadraturis, & ultimo in Octantibus per Phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Obſervatorio Regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20gr. 43′. 40″, & Apogæi ejus ♋ 7gr. 44′. 30″, & motum medium Lunæ ♒ 15gr. 20′. 00″, & Apogæi ejus ♓ 8gr. 20′. 00″, & Nodi aſcendentis ☊ 27gr. 24′. 20″; & differentiam meridianorum Obſervatorii hujus & Obſervatorii Regii *Pariſienſis* 0hor. 9min. 20ſec.

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML seu PT, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis $TM - LM$ seu $2PK$ in Syzygiis Lunaribus, est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ, id est, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in superficie Terræ, est ad vim gravitatis, ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 gradibus distant



a Sole. Vi altera quæ duplo major est, Mare elevatur & sub Sole & in regione Soli opposita. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant à Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac si tota in regionibus sub Sole & Soli oppositis Mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a Sole nil ageret.

Hæc est vis Solis ad Mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur quam in mediocri sua distantia a Terra. In aliis Solis positionibus vis ad Mare attollendum, est ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directe & cubus distantiæ Solis a Terra inverse.

Corol. Cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo

tudo Aquæ ſub Æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub Polis menſura pedum Pariſienſium 85820; vis Solaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo Aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus diſtant a Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim cum octava parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85820 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum Maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali totus Aquæ aſcenſus in Conjunctione & Oppoſitione Luminarium (obſervante *Samuele Sturmio*) eſt pedum plus minus 45, in Quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore verſantium & mediocriter a Terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* Æſtus maris (ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*) ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo Æſtus in Syzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in Quadraturis, pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem Æſtus in portu *Biſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, Æſtus maximi non incidunt in ipſas Luminarium Syzygias, ſed ſunt tertii a Syzygiis ut dictum fuit, ſeu proxime ſequuntur tertium Lunæ poſt Syzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam

De Mundi Systemate

ram a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, adeoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime ſequuntur appulſum Lunæ ad meridianum, ubi Luna diſtat a Sole vel ab oppoſitione Solis gradibus plus minus octodecim vel novendecim in conſequentia. Æſtas & Hyems maxime vigent, non in ipſis Solſtitiis, ſed ubi Sol diſtat a Solſtitiis decima circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus Æſtus maris oritur ab appulſu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna diſtat a Sole decima circiter parte motus totius ab Æſtu ad Æſtum. Sit diſtantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis in hac diſtantia Lunæ a Syzygiis & Quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quam in ipſis Syzygiis & Quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ ſeu anguli graduum 37, hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis Lunæ in Quadraturis, ob declinationem Lunæ ab Æquatore, diminui debet. Nam Luna in Quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt Quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad Mare movendum diminuitur in duplicata ratione ſinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis Lunæ in his Quadraturis eſt tantum 0,8570327 L. Eſt igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri Orbis in quo Luna abſque Eccentricitate moveri deberet, ſunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque diſtantia Lunæ a Terra in Syzygiis eſt ad diſtantiam ejus in Quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a Syzygiis ubi Æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a Quadraturis ubi Æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam, ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad Mare movendum ſunt in triplicata ratione diſtantiarum inverſe, ideoque vires in maxima & minima harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia, ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis Solis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol.

Corol. 1. Cum Aqua vi Solis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum octava parte digiti, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum octo, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi Luna eſt in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi Æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes Maris motus excitandos abunde ſufficit, & quantitati motuum probe reſpondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, Æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit Æſtus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, aſcenſus aquæ intra Tropicos minor eſt quam in Zonis temperatis, propter anguſtiam Maris inter *Africam* & Auſtralem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in Inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In Portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis, per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo Æſtus reſpondet viribus Solis & Lunæ.

Corol.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad Mare movendum, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In Æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad Mare movendum, eſt ad Solis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Lunæ erit ad denſitatem Solis, ut 4,4815 ad 1 directe & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis ſint 31′. 16½″ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ, ut 100 ad 396; & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ, ut 4891 ad 3960 ſeu 21 ad 17. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quam Terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter Lunæ (ex Obſervationibus Aſtronomicis) ſit ad veram diametrum Terræ, ut 100 ad 365; erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ, ut 1 ad 39,371.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ſemidiametrorum maximarum Terræ 60¼ quamproxime. Nam ſemidiameter maxima Terræ fuit pedum Pariſienſium 19767630, & mediocris diſtantia centrorum Terræ & Lunæ ex hujuſmodi ſemidiametris 60¼ conſtans, æqualis eſt pedibus 1190999707. Et hæc diſtantia (per Corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371, quæ proinde eſt pedum 1161498340. Et cum Luna revolvatur reſpectu Fixarum, diebus 27, horis 7 & minutis primis 43⅕; ſinus verſus anguli quem Luna, tempore minuti unius primi motu ſuo medio, circa commune gravitatis centrum Terræ & Lunæ deſcribit, eſt 1275235, exiſtente radio 100, 000000, 000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1161498340 ad pedes 14,811833. Luna igitur vi illa qua retinetur in Orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,811833. Et ſi hæc vis augeatur in ratione 177$\frac{22}{40}$ ad 178$\frac{22}{40}$, habebitur

bebitur vis tota gravitatis in Orbe Lunæ, per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi deſcribere deberet pedes 14,89517. Et ad ſexageſimam partem hujus diſtantiæ, id eſt, ad diſtantiam pedum 19849995 a centro Terræ, corpus grave cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribere deberet etiam pedes 14,89517. Diminuatur hæc diſtantia in ſubduplicata ratione pedum 14,89517 ad pedes 15,12028, & habebitur diſtantia pedum 19701678 a qua grave cadendo, eodem tempore minuti unius ſecundi deſcribet pedes 15,12028, id eſt, pedes 15, dig. 1, lin. 5,32. Et hac vi gravia cadunt in ſuperficie Terræ, in Latitudine urbis *Lutetiæ Pariſiorum*, ut ſupra oſtenſum eſt. Eſt autem diſtantia pedum 19701678 paulo minor quam ſemidiameter globi huic Terræ æqualis, & paulo major quam Terræ hujus ſemidiameter mediocris, ut oportet. Sed differentiæ ſunt inſenſibiles. Et propterea vis qua Luna retinetur in Orbe ſuo, ad diſtantiam maximarum Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{4}$, ea eſt quam vis Gravitatis in ſuperficie Terræ requirit.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, eſt mediocrium Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{2}$ quamproxime. Nam ſemidiameter mediocris, quæ erat pedum 19688725, eſt ad ſemidiametrum maximam pedum 19767630, ut $60\frac{1}{4}$ ad $60\frac{1}{2}$ quamproxime.

In his computationibus Attractionem magneticam Terræ non conſideravimus, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc Attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum Maris, & parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis & Lunæ ex Phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum eſſet ad inſtar Maris noſtri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet ad vim Lunæ, qua Mare noſtrum in partibus & ſub Luna & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diame-

De Mundi Systemate

diametrum Terræ conjunctim; id est, ut 39,371 ad 1 & 100 ad 355 conjunctim, seu 1079 ad 100. Unde cum Mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{4}{13}$, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes $93\frac{1}{2}$. Eaque de causa Figura Lunæ Sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 187. Talem igitur Figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

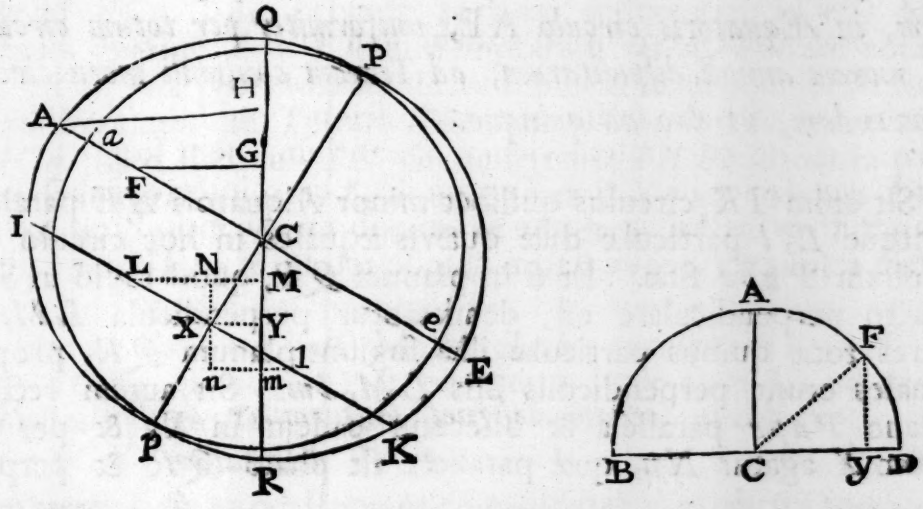
Corol. Inde vero fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longè tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem in Prop. XVII. allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

LEMMA I.

Si APEp *Terram designet uniformiter densam, centroque* C *& Polis* P, p *& Æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur Sphæra* Pape; *sit autem* QR *planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ Sphæra modo descripta altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium, in Æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in Æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime distat, consistentium vim & efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione Æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam centro *C* diametro *BD* describatur semicirculus *BAFDC*. Dividi intelligatur semicircumferentia *BAD* in partes

partes innumeras æquales, & a partibus ſingulis F ad diametrum BD demittantur ſinus FY. Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus FY æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus omnibus CY, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris CF; adeoque ſumma quadratorum ex omnibus FY, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris CF.



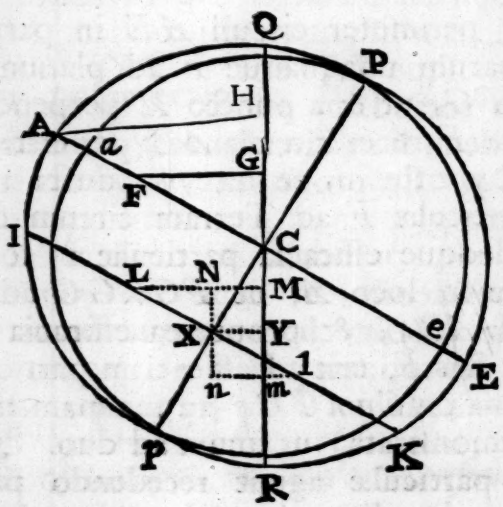
Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & a puncto A perpendiculum AH. Et vis qua particula F recedit a plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG, erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Adeoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc eſt, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis F, erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut ſumma omnium FCq ad ſummam totidem ACq, hoc eſt, (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q.E.D.*

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano QR, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli Æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano Æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: Dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in Æquatoris circulo AE, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

Sit enim *IK* circulus quilibet minor Æquatori *AE* parallelus, sintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum *QR*, quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*. Sit autem recta *Ll* plano *Pape* parallela & bisecetur eadem in *X*, & per punctum *X* agatur *Nn*, quæ parallela sit plano *QR* & perpendi-



culis *LM*, *lm* occurrat in *N* ac *n*, & in planum *QR* demittatur perpendiculum *XY*. Et particularum *L* & *l* vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM$

$-NM\times mC$: & harum differentia $LN\times Mm-NM\times\overline{MC+mC}$, eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN\times Mm$ ſeu $2LN\times NX$, eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2AH\times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM\times\overline{MC+mC}$ ſeu $2X\Upsilon\times C\Upsilon$, ad particularum earundem in A conſiſtentium vim $2AH\times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad Terram rotandam, eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium, ad Terram itidem rotandam, ut $LXq-CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2, (per Lem. I.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2CXq$ ad $2ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK, ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq-2CXq$ ad $2ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq-2CXq$ ad ACq.

Jam vero ſi Sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus inſiſtant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujuſque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut IXq in $IXq-2CXq$. Et vis materiæ ejuſdem, ſi in circuli AE perimetro conſiſteret, eſſet ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium conſiſtentis, eſt ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE conſiſtentis, ut omnia IXq in $IXq-2CXq$ ad totidem IXq in ACq, hoc eſt, ut omnia $ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$ ad totidem $ACq-CXq$ in ACq, id eſt, ut omnia $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$ ad totidem $ACqq-ACq\times CXq$, hoc eſt, ut tota quantitas fluens cujus fluxio eſt $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem cujus fluxio eſt $ACqq-ACq\times CXq$; ac proinde per Methodum Fluxionum, ut $ACqq\times CX-\frac{4}{3}ACq\times CXcub+\frac{1}{5}CXqc$ ad $ACqq\times CX-\frac{1}{3}ACq\times CXcub$, id eſt, ſi pro CX ſcribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}ACqc$ ad $\frac{2}{3}ACqc$, hoc eſt, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Iisdem positis: Dico tertio quod motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000.

Est enim motus Cylindri circum axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus Terra omni reliqua sublata, solus in Orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Ecliptice in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire Præceſſionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}.$ & hujus dimidium $8'. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}.$ (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto ſidereo $20^{gr}. 11'. 46''.$ Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46''.$ in antecedentia; & ſi plures eſſent Lunæ motus Nodorum cujuſque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent ut tempora periodica; ſi Luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''.$ ut dies ſidereus horarum 23. 56'. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43'; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; ſive Lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit Terræ omni $PapAPepE$ quæ globo $Pape$ ſuperior eſt; (*Vid. Fig. pag.* 434.) & quoniam globus iſte eſt ad Terram illam ſuperiorem ut $aCqu.$ ad $ACqu. - aCqu.$ id eſt (cum Terræ diameter minor PC vel aC ſit ad diametrum majorem AC ut 229 ad 230,) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte Terram ſecundum Æquatorem cingeret & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum quo ipſius Nodi ſeu puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum Æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum Æquinoctialium corporis ex annulo & globo compoſiti, ad motum

20gr. 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 *IT*, *in Fig. pag.* 403 & 404.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta Æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Idcoque annuus Æquinoctiorum regressus jam esset ad 20gr. 11′. 46″, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9″. 56‴. 50iv.

Cæterum hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet 9″. 7‴. 20iv. Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad Mare movendum erat ad vim Solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda, est ad vim Solis in eadem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio a vi Lunæ oriunda 40″. 52‴. 52iv; ac tota Præcessio annua a vi utraque oriunda 50″. 00‴. 12iv. Et hic motus cum Phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum ex Observationibus Astronomicis est minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo Terræ ad Æquatorem superet altitudinem ejus ad Polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

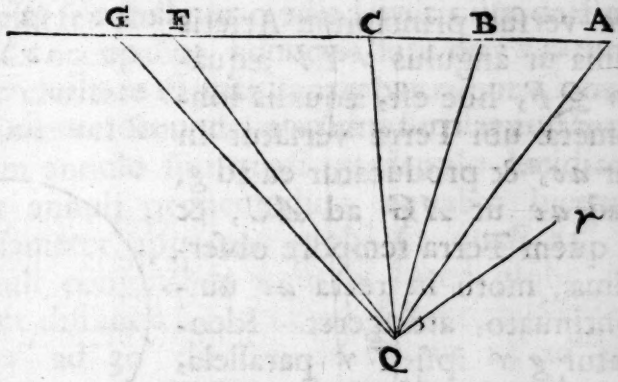
Descripsimus jam Systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum: superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA

LEMMA IV.

Cometas esse Luna superiores & in regione Planetarum versari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et e contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem tanto celerius fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa e Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ,

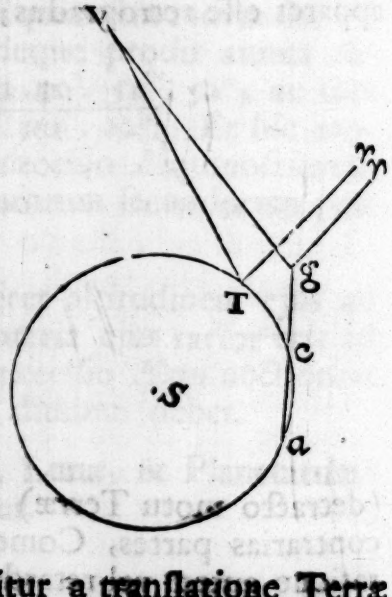


(detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto γQA, γQB, γQC observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque γQF longitudo ultimo observata, ubi Cometa videri desinit.

Agatur

De Mundi Systemate

Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur AC ad G, ut ſit AG ad AB ut tempus inter obſervationem primam & ultimam, ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur QG. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus γQG longitudo Cometæ tempore Obſervationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo γQG, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terra, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a Cometæ motu inæquabili in Orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero Cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet S Solem, acT Orbem magnum, a locum Terræ in obſervatione prima, c locum Terræ in obſervatione tertia, T locum Terræ in obſervatione ultima, & $T\gamma$ lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus γTV æqualis angulo γQF, hoc eſt, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra verſatur in T. Jungatur ac, & producatur ea ad g, ut ſit ag ad ac ut AG ad AC, & erit g locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur $g\gamma$ ipſi $T\gamma$ parallela, & capiatur angulus γgV angulo γQG æqualis, erit hic angulus γgV æqualis longitudini Cometæ e loco g ſpectati; & angulus TVg parallaxis erit, quæ oritur a tranſlatione Terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit Cometæ in plano Ecliptiæ. Hic autem locus V Orbe Jovis inferior eſſe ſolet.



Idem

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes Cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione subduplicata lucis ad lucem inverse. Sic minima capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum a *Flamstedio* observata & Micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverse, & 12″ ad 30″ directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprili*, ut author est *Hevelius*, claritate sua pene Fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio

De Mundi Systemate

dio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii Cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Perihelиis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quam Planetæ, qui hic sunt, illustrantur a Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum a Terra Solem versus, ac decrescente in eorum recessu a Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (observante *Hevelio*,) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de

de motu ſuo apparente, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine Menſis *Julii* ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in Orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis Micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſa coma, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Menſis *Decembris*, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantia novem graduum a Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a Terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga Solis maxime ſplenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum

De Mundi Systemate

regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est a latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod Cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum, diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitescceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata est, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PRO-

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Propos. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt: Orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine Orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis Orbis Cometæ sit quadruplo major axe Orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ, absque erroribus sensibilibus, adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis, erit semper ad velocitatem Planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ Planetæ a centro Solis, ad distantiam Cometæ a centro Solis quamproxime. Ponamus radium Orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum maximam, esse partium 100000000: & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris a Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde si Latus rectum Parabolæ quadruplo majus sit radio Orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam Cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata.

LEMMA

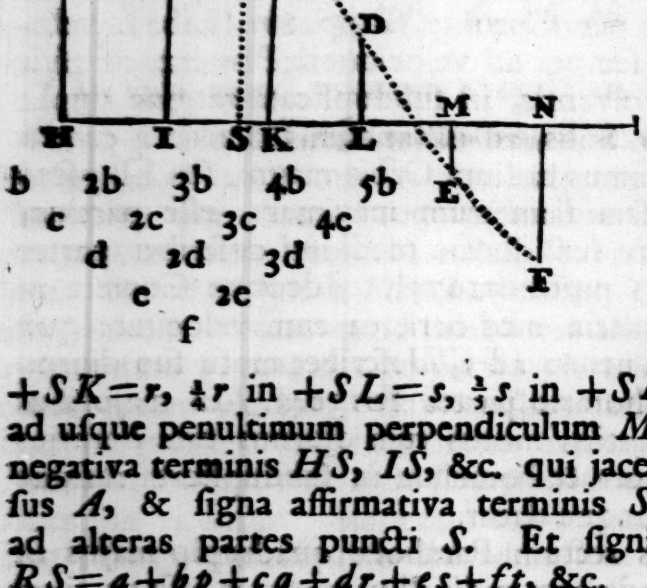
De Mundi Systemate

LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam HN demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c. ſecundas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias $d, 2d, 3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $AH-BI=b$, $BI-CK=2b$, $CK-DL=3b$, $DL+EM=4b$, $-EM+FN=5b$, &c. dein $b-2b=c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam quæ hic eſt f. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH=a$, $-HS=p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS=q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK=r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL=s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM=t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.



Caſ. 2. Quod ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; ſecundas per intervalla bina diviſas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias per intervalla terna diviſas $d, 2d, 3d$, &c. quartas per inter-

intervalla quaterna diviſas e, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. Poſtea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, p in $-IS=q$, q in $+SK=r$, r in $+SL=s$, s in $+SM=t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproxime. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proxime cum area curvæ illius quadrandæ. Poteſt autem Parabola, per Methodos notiſſimas, ſemper quadrari Geometrice.

LEMMA VI.

Ex obſervatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Deſignent HI, IK, KL, LM tempora inter obſervationes, (*in Fig. præced.*) HA, IB, KC, LD, ME obſervatas quinque longitudines Cometæ, HS tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæſita.

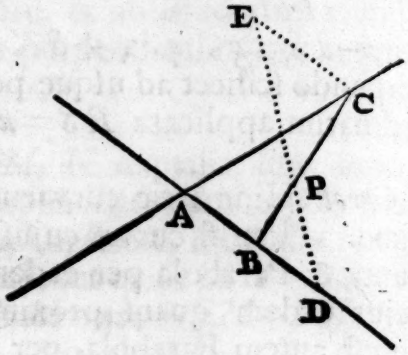
Eadem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

LEMMA

LEMMA VII.

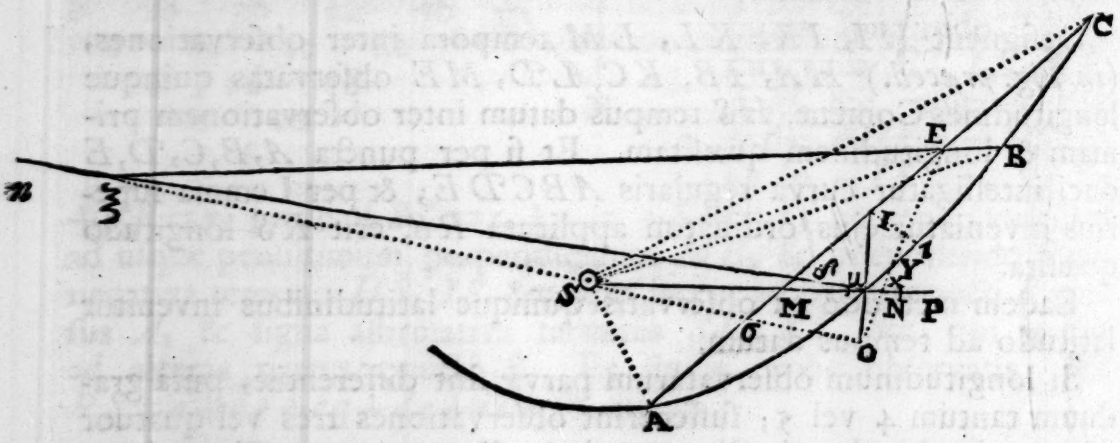
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscîssæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q.E.F.*

LEMMA VIII.

Sit ABC *Parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* Iμ *& vertex* μ. *In* Iμ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius*



Iμ. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* ξ, *ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chorda* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproxime.*

Junga-

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in Υ, & agatur μX quæ tangat eundem arcum in vertice μ & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $AC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Cum autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB, & de summa auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque adeo ad aream $ASC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASB\Upsilon\mu A$ quamproxime, & hæc area $ASB\Upsilon\mu A$ est ad aream $ASC\Upsilon\mu A$, ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproxime. *Q.E.D.*

Corol. Ubi punctum B incidit in Parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ, & in ea capiatur ξn quæ sit ad μB ut $27MI$ ad $16M\mu$: acta Bn secabit chordam AC in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, si punctum B magis distat a vertice principali Parabolæ quam punctum μ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

Rectæ $I\mu$ *&* μM *&* *longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

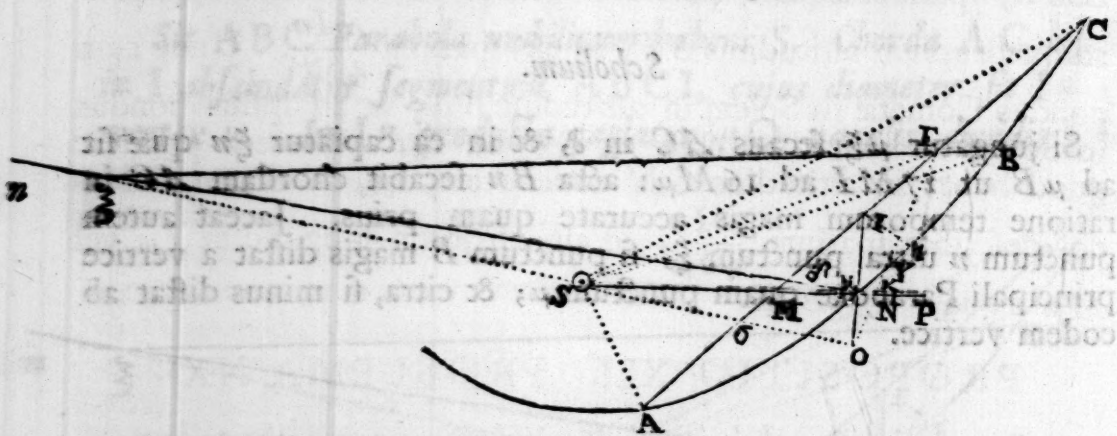
Nam $4S\mu$ est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem μ.

De Mundi Systemate

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *ſit pars tertia ipſius* μI, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* AμC, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi Cometa velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ Parabolicæ *ASC*μ. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcripta & longitudine *S*μ, eſſet ad contentum ſub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*μ ad triangulum *ASCM*, id eſt, ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut *S*μ ad *SN*. Cum autem velocitas



Cometæ in altitudine *SP* ſit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad velocitatem in altitudine *S*μ, in ſubduplicata ratione *SP* ad *S*μ inverſe, id eſt, in ratione *S*μ ad *SN*; longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut *S*μ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q.E.D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine *S*μ + $\frac{1}{3}$*I*μ, eodem tempore deſcriberet chordam *AC* quamproxime.

LEMMA

LEMMA XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem, qua urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis quo in Orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore deſcribat arcum Parabolicum *AC*, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine *SP* (per Lemma noviſſimum) deſcribet chordam *AC*, adeoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in Circulo cujus ſemidiameter eſſet *SP*, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum cujus longitudo eſſet ad arcus Parabolici chordam *AC*, in ſubduplicata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine *SP*, cadendo de altitudine illa in Solem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis *SP*, id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine *SN*, ſit ad ipſius pondus in Solem in altitudine *SP*, ut *SP* ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine *SN* eodem tempore, in Solem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in Parabola moti Trajectoriam ex datis tribus Obſervationibus determinare.

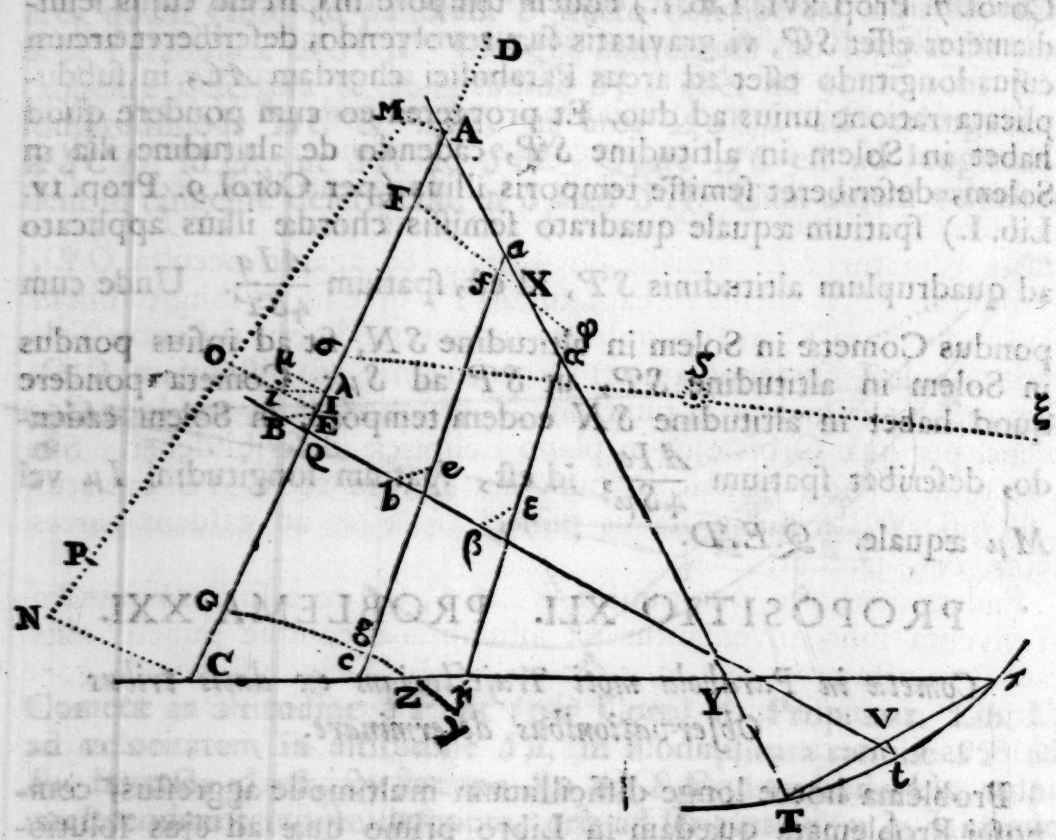
Problema hocce longe difficillimum multimode aggreſſus, compoſui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet

De Mundi Systemate

ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* incidat in punctum *M* quamproxime, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus Cometæ locus per Lemma sextum.

Designent *S* Solem, *T*, *t*, τ tria loca Terræ in Orbe magno, *TA*, *tB*, τ*C* observatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter observationem primam & secundam, W tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore, ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distantia, describere posset, quæque per Corol. 3. Prop. XL. Lib. III. invenienda est, & *tV* perpendiculum in chordam *T*τ. In longi-



tudine media *tB* sumatur utcunque punctum *B* pro loco Cometæ in plano Eclipticæ, & inde versus Solem *S* ducatur linea *BE*, quæ sit ad sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium *tB*.

Et

Et per punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC ad rectas TA & τC terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione prima ac tertia quamproxime, ſi modo B ſit locus ejus recte aſſumptus in obſervatione ſecunda.

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma+3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, a puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ ſit ad priorem BE in duplicata ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu+\frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes V & W. Et erunt A & C loca Cometæ magis accurate.

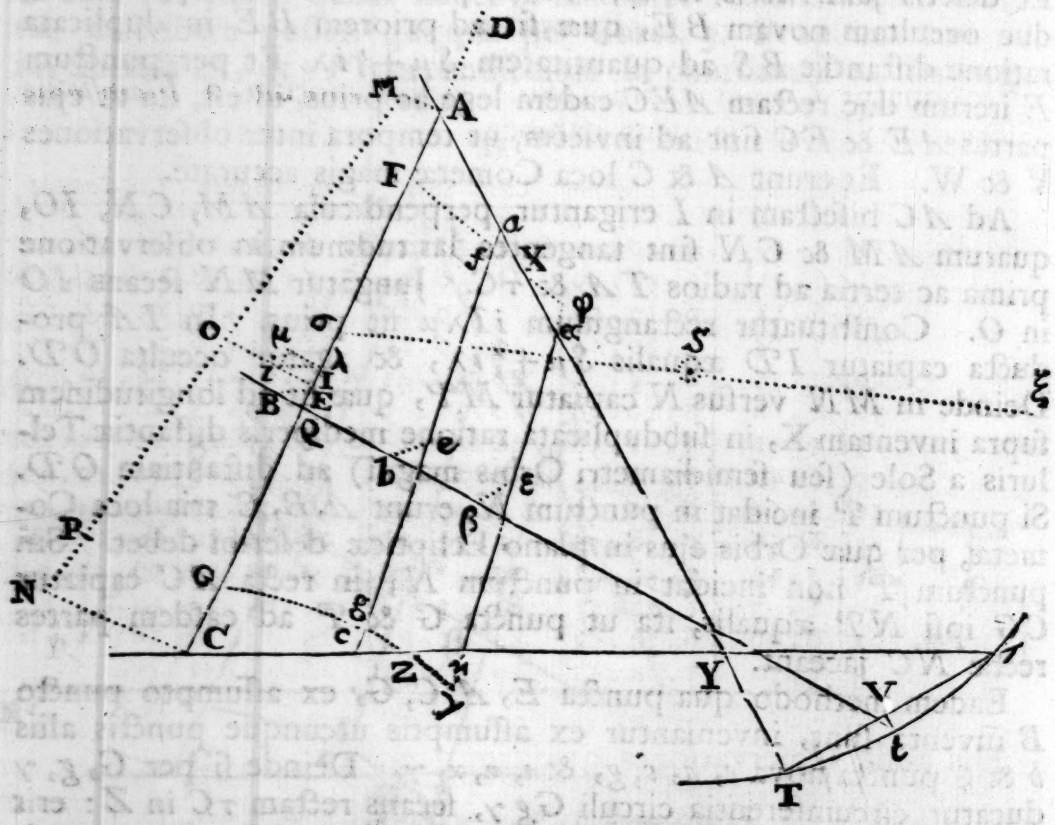
Ad AC biſectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quarum AM & CN ſint tangentes latitudinum in obſervatione prima ac tertia ad radios TA & τC. Jungatur MN ſecans IO in O. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu+\frac{2}{3}i\lambda$, & agatur occulta OD. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam X, in ſubduplicata ratione mediocris diſtantiæ Telluris a Sole (ſeu ſemidiametri Orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca Cometæ, per quæ Orbis ejus in plano Eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in recta AC capiatur CG ipſi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eaſdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E, A, C, G, ex aſſumpto puncto B inventa ſunt, inveniantur ex aſſumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g, & ε, α, $\varkappa$, γ. Deinde ſi per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, ſecans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in AC, ac, $\alpha\varkappa$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipſis CG, cg, $\varkappa\gamma$ reſpective æquales, & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\Phi$, ſecans rectam AT in X; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in Orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo deſcribatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

Con-

De Mundi Systemate

Conſtructionis hujus demonſtratio ex Lemmatibus conſequitur: quippe cum recta AC ſecetur in E in ratione temporum, per Lemma VII, ut oportet per Lem. VIII: & BE per Lem. XI. ſit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. x.) longitudo ſit chordæ arcus, quem Cometa in Orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi MN æqualis fuerit, ſi modo B ſit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.



Cæterum puncta B, b, β non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt, in quo veſtigium Orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecat rectam tB, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ ſit ad $\frac{4}{3}T\tau$ in ſubduplicata ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabitur punctum B quod prima vice uſurpare licet. Tum recta AC deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa

inventa insuper longitudine MP; in tB capiatur punctum b, ea lege, ut si TA, τC se mutuo secuerint in Υ, sit distantia Υb ad distantiam ΥB, in ratione composita ex ratione MP ad MN & ratione subduplicata SB ad Sb. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β, si modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum sufficerint. Nam si distantia Bb perexigua obvenerit, postquam inventa sunt puncta F, f & G, g, actæ rectæ Ff & Gg secabunt TA & τC in punctis quæsitis X & Z.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

		Tem. appar.	Temp. verum	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
		h. ′	h. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″
1680 *Dec.*	12	4.46	4.46. 0	♍ 1.51.23	♍ 6.31.21	8.26. 0
	21	6.32½	6.36.59	11. 6.44	♎ 5. 7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14. 9.26	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16. 9.22	28.24. 6	27. 0.57
	29	7.55	8. 3. 2	19.19.43	♐ 13.11.45	28.10. 5
	30	8. 2	8.10.26	20.21. 9	17.39. 5	28.11.12
1681 *Jan.*	5	5.51	6. 1.38	26.22.18	♈ 8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7. 0.53	♎ 0.29. 2	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6. 6.10	1.27.43	20.40.57	23.44. 0
	13	6.56	7. 8.55	4.33.20	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35.48	17.56.54
	30	8. 7	8.21.53	21.49.58	13.19.36	16.40.57
Feb.	2	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.48	16. 2. 2
	5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

His adde Observationes quasdam e nostris.

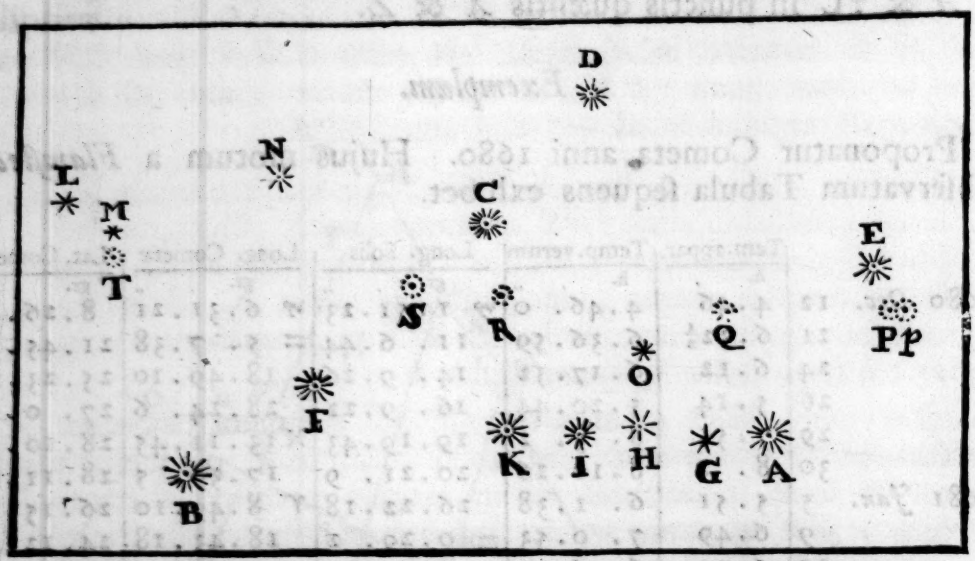
		Temp. appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febr.	25	8h.30′	♉ 26gr.18′.17″	12gr.46′⅞
	27	8 .15	27 . 4 .24	12 .36½
Mart.	1	11 . 0	27 .53 . 6	12 .24⅝
	2	8 . 0	28 .12 .27	12 .20
	5	11 .30	29 .20 .51	12 . 3½
	9	8 .30	♊ 0 .43 . 4	11 .45⅞

Hæ Observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filisque in foco Telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis

&

De Mundi Systemate

& positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* o) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{1}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{5}{11}$, *CD* $23\frac{5}{7}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$,



DI $53\frac{3}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{1}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{4}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{1}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{3}{12}$, *NL* $31\frac{1}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hac recta esset $\frac{1}{6}CD$. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* existentis distantia a stella *E* erat minor quam $\frac{1}{13}AE$, major quam $\frac{1}{5}AE$, adeoque æqualis $\frac{1}{14}AE$ proxime; & angulus *ApE* nonnihil obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantiæ Cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}pE$.

Eadem nocte, hora $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* existentis distantia a stella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}AE$, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}AE$, adeoque æqua-

lis

lis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}AE$, seu $\frac{8}{39}AE$ quamproxime. A perpendiculo autem a stella A ad rectam PE demisso, distantia Cometæ erat $\frac{4}{5}PE$.

Die ☉is, *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ P. M. Cometæ in Q existentis distantia a stella O æquabat distantiam stellarum O & H, & recta QO producta transibat inter stellas K & B. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes, magis accurate definire non potui.

Die ♂tis, *Mart* 1, hor. 11. P. M. Cometa in R existens, stellis K & C accurate interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{8}CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{16}CR$ seu $\frac{16}{45}CK$.

Die ☿ii, *Mart.* 2. hor. 8. P. M. Cometæ existentis in S, distantia a stella C erat $\frac{4}{9}FC$ quamproxime. Distantia stellæ F a recta CS producta erat $\frac{1}{24}FC$; & distantia stellæ B ab eadem recta, erat quintuplo major quam distantia stellæ F. Item recta NS producta transibat inter stellas H & I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quam stellæ I.

Die ♄ni, *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. P. M. Cometa existente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta LT producta transibat inter B & F, quadruplo vel quintuplo propior F quam B, auferens a BF quintam vel sextam ejus partem versus F. Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quam stellæ F. Erat M stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum A & B distantia esset $2^{gr.}\ 6'.\ 46''$, & stellæ A longitudo ♉ $26^{gr.}\ 41'.\ 50''$ & latitudo borealis $12^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$, stellæque B longitudo ♉ $28^{gr.}\ 40'.\ 24''$ & latitudo borealis $11^{gr.}\ 17'\frac{2}{10}$;) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultima *Mart.* 9. ubi positiones stellarum minus accurate determinare potui. *Cassinus* qui ascensionem rectam Cometæ eodem tempore observavit, declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivit. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine

De Mundi Systemate

motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, a parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum, selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter Orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, *Sμ* 9503, *iλ* 413: *BE* secunda vice 421, *OD* 10186, X 85284, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & *τZ* 11322. Ex quibus Orbem definiendo, inveni Nodos ejus descendentem in ♋ & ascendentem in ♈ 1 gr. 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 gr. 20′⅓; verticem ejus (seu Perihelium Cometæ) distare a Nodo 8 gr. 38′, & esse in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine australi 7 gr. 34′; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri Orbis magni posito 100000000; Cometam vero in hoc Orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. P. M. in vertice Orbis seu Perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula sinuum naturalium collectas, determinavi Graphice; construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter Orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16½ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc Orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

	Distant. Cometæ a Sole	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♈ 6 . 32	8 . 18½	♈ 6 . 31⅓	8 . 26	+ 1	− 7½
29	8403	♓ 13 . 13⅔	28 . 0	♓ 13 . 11¼	28 . 10½	+ 2	− 10½
Febr. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29⅔	♉ 16 . 59⅞	15 . 27⅖	+ 0	+ 2¼
Mar. 5	21737	29 . 19¼	12 . . 4	29 . 20⅙	12 . 3½	− 1	+ ½

Postea vero *Halleius* noster Orbitam, per calculum Arithmeticum, accuratius determinavit quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum Nodorum in ♋ & ♈ 1 gr. 53′, & Inclinationem plani Orbitæ ad Eclipticam 61 gr. 20′⅓, ut & tempus Perihelii Cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4′: distantiam vero Perihelii

helii a Nodo ascendente, in Orbita Cometæ mensuratam, invenit esse 9 gr 20′, & Latus rectum Parabolæ esse 243 partium, existente mediocri Solis a Terra distantia partium 10000. Et ex his datis, calculo itidem Arithmetico accurate instituto, loca Cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

Tempus verum	Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46. 0	28028	♍ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	−1.56	+0. 0
21. 6.36.59	61076	♏ 5. 6.30	21.43.20	−1. 8	−2.10
24. 6.17.52	70008	18.48.20	25.22.40	−0.50	−0.44
26. 5.20.44	75576	28.22.45	27. 1.36	−1.21	+0.39
29. 8. 3. 2	84021	♐ 13.12.40	28.10.10	+0.55	+0. 5
30. 8.10.26	86661	17.40. 5	28.11.20	+1. 0	+0. 8
Jan. 5. 6. 1.38	101440	♑ 8.49.49	26.15.15	+0.39	−0.11
9. 7. 0.53	110959	18.44.36	24.12.54	+1.18	+0.12
10. 6. 6.10	113162	20.41. 0	23.44.10	+0. 3	+0.10
13. 7. 8.55	120000	26. 0.21	22.13.30	+0.47	−0. 6
25. 7.58.42	145370	♒ 9.33.40	17.57.55	−2. 8	+1. 1
30. 8.21.53	155303	13.17.41	16.42. 7	−1.55	+1.10
Feb. 2. 6.34.51	160951	15.11.11	16. 4.15	−2.37	+2.13
5. 7. 4.41	166686	16.58.25	15.29.13	−1.27	+1.50
25. 8.19. 0	202570	26.15.46	12.48. 0	−2.31	+1. 8
Mar. 5.11.21. 0	216205	29.18.35	12. 5.40	−2.16	+2.10

Apparuit etiam hic Cometa mense *Novembri* præcedente, & die undecimo hujus mensis stylo veteri, ad horam quintam matutinam, *Cantuariæ* in *Anglia*, visus fuit in ♍ 12½ cum latitudine boreali 2 gr. circiter. Crassissima fuit hæc Observatio: meliores sunt quæ sequuntur.

Nov. 17, st. vet. *Ponthæus* & socii hora sexta matutina *Romæ* (id est, hora 5, 10′ *Londini*) filis ad fixas applicatis Cometam observarunt in ♎ 8. 30′, cum latitudine australi 0 gr. 40′. Extant eorum Observationes in tractatu quem *Ponthæus*, de hoc Cometa, in lucem edidit. *Cellius* qui aderat & observationes suas in Epistola ad *D. Cassinum* misit, Cometam eadem hora vidit in ♎ 8 gr. 30′ cum latitudine australi 0 gr. 30′. Eadem hora *Galletius* etiam Cometam vidit in ♎ 8 gr. sine latitudine.

Nov. 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id est, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* Cometam vidit in ♎ 13 gr. 30′ cum latitudine australi 1 gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine australi 1 gr. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Romæ*, Cometam vidit in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine australi 1 gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academia *Flexiensi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id est, hora 5, 9′ *Londini*) Cometam vidit in medio inter stellas

De Mundi Systemate

duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in Virginis australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12. 46′, cum latitudine australi 50′. Eodem die *Bostoniæ* in *Nova-Anglia* in Latitudine 42½ graduum, hora quinta matutina, (id est *Londini* hora matutina 9. 44′) Cometa visus est prope ♎ 14, cum latitudine australi 1 gr. 30′, uti a *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (observante juvene quodam) distabat a Spica ♍ quasi 2 gr. Boreazephyrum versus. Eodem die hor. 5. mat. *Bostoniæ* in *Nova-Anglia*, Cometa distabat a Spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum existente 40′. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa distabat a Spica intervallo quasi gradus unius. Et ex his observationibus inter se collatis colligo, quod hora 9. 44′. *Londini*, Cometa erat in ♎ 18 gr. 40′, cum latitudine australi 1 gr. 18′ circiter. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ gr. hora quinta matutina (id est, hora 10ª *Londini*) Cometam vidit supra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi ¼ gr. Observator idem, eadem hora diei sequentis, Cometam vidit quasi 2 gr. inferiorem Spica. Congruent hæ observationes cum observationibus in *Nova-Anglia* & *Jamaica* factis, si modo distantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore superior esset Spica ♍, altitudine 1 gr. circiter, ac die posteriore inferior eadem stella, altitudine perpendiculari 3 gr. 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta matutina *Venetiis* (id est, hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 gr., cum latitudine australi 1 gr. 30′. Eodem die *Bostoniæ*, distabat Cometa a Spica ♍, 4 gr. longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7¼ Cometam observarunt in ♎ 27 gr. 50′, cum latitudine australi 1 gr. 16′; *Ango* hora quinta matutina in ♎ 27 gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27 gr. 51′. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id est, 2 gr. 2′.

Nov. 22. Cometa visus est a *Montenaro* in ♏ 2. 33′. *Bostoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3 gr. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id est, 1 gr. 30′. Eodem die *Londini*, hora

hora mat. $6\frac{1}{2}$ *Hookius* noſter Cometam vidit in ♏ $3^{gr.}$ $30'$ circiter, idque in linea recta quæ tranſit per Spicam Virginis & Cor Leonis, non exacte quidem, ſed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a Cometa per Spicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus Cordis Leonis, interpoſito perparvo intervallo inter Cor Leonis & hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis & Spicam Virginis tranſiens, Eclipticam ſecuit in ♍ $3^{gr.}$ $46'$, in angulo $2^{gr.}$ $51'$. Et ſi Cometa locatus fuiſſet in hac linea in ♏ $3^{gr.}$, ejus latitudo fuiſſet $2^{gr.}$ $26'$. Sed cum Cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hac linea boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ ♍, eratque $1^{gr.}$ $30'$ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam $1^{gr.}$ $30'$. Inter limites autem jam conſtitutos $2^{gr.}$ $26'$ & $1^{gr.}$ $30'$, magnitudine mediocri latitudo erit $1^{gr.}$ $58'$ circiter. Cauda Cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad Spicam ♍, declinans aliquantulum a Stella iſta, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & Cauda Æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione Solis boream verſus.

Nov. 24. Ante ortum Solis Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ $12^{gr.}$ $52'$, ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis & Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam $2^{gr.}$ $38'$. Hæc latitudo uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam $1^{gr.}$ $58'$; & magnitudine mediocri, abſque notabili errore, ſtatui poteſt $2^{gr.}$ $18'$. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & Obſervator in *Nova-Anglia* eandem fere magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per Azimuthos & Altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones Cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & Obſervatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ.

Jam collatis Obſervationibus inter ſe, colligere videor quod Cometa hoc menſe circulum fere maximum deſcripſit, ſecantem Eclipticam in ♍ 25. 12′, idque in angulo $3^{gr.}$ $12'$ quamproxime. Nam & *Montenarus* Orbitam ab Ecliptica in auſtrum, tribus ſaltem

De Mundi Systemate

tem gradibus declinaſſe dicit. Et cognita curſus poſitione, longitudines Cometæ ex obſervationibus collectæ, ad incudem jam revocari poſſunt & melius nonnunquam determinari, ut fit in ſequentibus. *Cellius* Novemb. 17. obſervavit diſtantiam Cometæ a Spica ♍, æqualem eſſe diſtantiæ ejus a ſtella lucida in dextra ala Corvi: & hinc locandus eſt Cometa in interſectione hujus circuli quem Cometa motu apparente deſcripſit, cum circulo maximo qui a fixis illis duabus æqualiter diſtat, atque adeo in ♎ 7 gr. 54′, cum latitudine auſtrali 43′. Præterea *Montenarus*, *Novemb.* 20. hora ſexta matutina *Venetiis*, Cometam vidit non totis quatuor gradibus diſtantiam a Spica; dicitque hanc diſtantiam, vix æquaſſe diſtantiam ſtellarum duarum lucidarum in alis Corvi, vel duarum in juba Leonis, hoc eſt 3 gr. & 30′ vel 32′. Sit igitur diſtantia Cometæ a Spica 3 gr. 30′, & Cometa locabitur in ♎ 22 gr. 48′, cum latitudine auſtrali 1 gr. 30′. Adhæc *Montenarus*, *Novemb.* 21, 22, 24 & 25 ante ortum Solis, Sextante æneo quintupedali ad minuta prima & ſemiminuta diviſo & vitris Teleſcopicis armato, diſtantias menſuravit Cometæ a Spica 8 gr 28′, 13 gr. 10′, 23 gr. 30′, & 28 gr. 13′: & has diſtantias, per refractionem nondum correctas, addendo longitudini Spicæ, collegit Cometam his temporibus fuiſſe in ♎ 27 gr. 51′, ♏ 2 gr. 33′, ♏ 12 gr. 52′ & ♏ 17 gr. 45′. Si diſtantiæ illæ per refractiones corrigantur, & ex diſtantiis correctis differentiæ longitudinum inter Spicam & Cometam probe deriventur, locabitur Cometa his temporibus in ♎ 27 gr. 52′, ♏ 2 gr. 36′, ♏ 12 gr. 58′ & ♏ 17 gr. 53′ circiter. Latitudines autem ad has longitudines in via Cometæ captas, prodeunt 1 gr. 45′, 1 gr. 58′, 2 gr. 22′ & 2 gr. 31′. Harum quatuor obſervationum horas matutinas *Montenarus* non poſuit. Priores duæ ante horam ſextam, poſteriores (ob viciniam Solis) poſt ſextam factæ videntur. Die 22, ubi Cometa ex obſervatione *Montenari* locatur in ♏ 2 gr. 36′, *Hookius* noſter eundem locavit in ♏ 3 gr. 30′ ut ſupra. *Montenarus* in defectu, *Hookius* in exceſſu erraſſe videntur. Nam Cometa, ex ſerie obſervationum, jam fuit in ♏ 2 gr. 56′ vel ♏ 3 gr. circiter.

Obſervationum ſuarum ultimam inter vapores & diluculum captam, *Montenarus* ſuſpectam habebat. Et *Cellius* eodem tempore (id eſt, *Novem.* 25) Cometam per ejus Altitudinem & Azimuthum locavit in ♏ 15 gr. 47′, cum latitudine auſtrali quaſi gradus unius. Sed *Cellius* obſervavit etiam eodem tempore, quod Cometa erat in linea recta cum ſtella lucida in dextro femore Vir-

Virginis & cum Lance auſtrali Libræ, & hæc linea ſecat viam Cometæ in ♏ 18gr. 36′. *Ponthæus* etiam eodem tempore obſervavit, quod Cometa erat in recta tranſeunte per Chelam auſtrinam Scorpii & per ſtellam quæ Lancem borealem ſequitur: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 16gr. 34′. Obſervavit etiam, quod Cometa erat in recta tranſeunte per ſtellam ſupra Lancem auſtralem Libræ & ſtellam in principio pedis ſecundi Scorpii: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 17gr. 55′. Et inter longitudines ex his tribus Obſervationibus ſic derivatas, longitudo mediocris eſt ♏ 17gr. 42′, quæ cum obſervatione *Montenari* ſatis congruit.

Erravit igitur *Cellius* jam locando Cometam in ♏ 15gr. 47′, per ejus Azimuthum & Altitudinem. Et ſimilibus Azimuthorum & Altitudinum obſervationibus, *Cellius* & *Ponthæus* non minus erraverunt locando Cometam in ♏ 20 & ♏ 24 diebus duobus ſequentibus, ubi ſtellæ fixæ ob diluculum vix aut ne vix quidem apparuere. Et corrigendæ ſunt hæ obſervationes per additionem duorum graduum, vel duorum cum ſemiſſe.

Ex omnibus autem Obſervationibus inter ſe collatis & ad meridianum *Londini* reductis, colligo Cometam hujuſmodi curſum quamproxime deſcripſiſſe.

Temp. med. ſt. vet.	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
d. h.	gr.	gr.
Nov. 16. 17 . 10	♎ 8 . 0	0.44 Auſt.
17. 17 . 10	12 . 52	1. 0
18. 21 . 44	18 . 40	1.18
19. 17 . 10	22 . 48	1.30
20. 17 fere	27 . 52	1.45
21. 17 fere	♏ 2 . 56	1.58
23. 17¼ fere	12 . 58	2.20
24. 17½ fere	17 . 53	2.29
26. 18 . 00	26 vel 27gr.	2.42

Loca autem Cometæ in Orbe Parabolico computata, ita ſe habent.

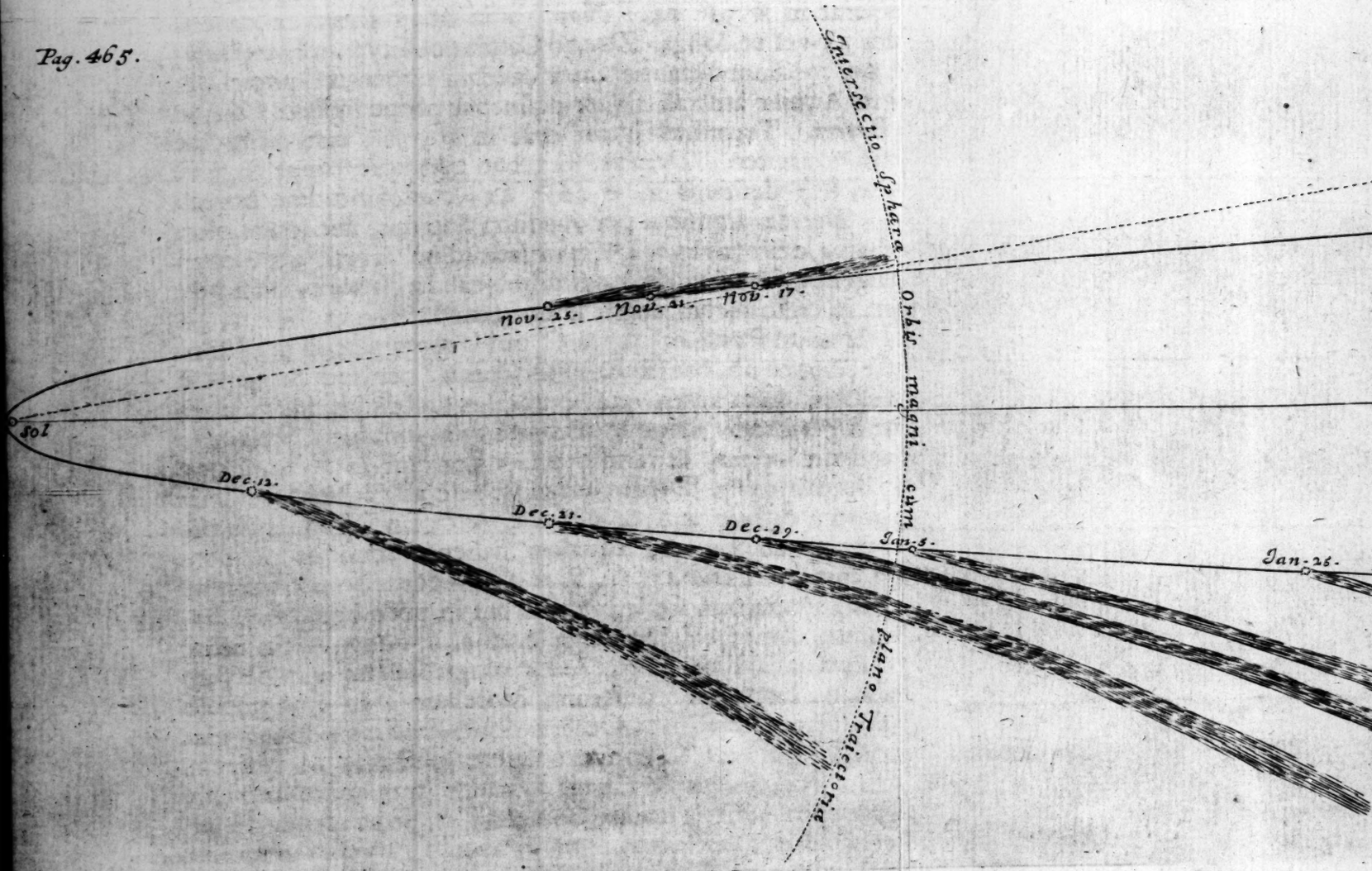
Temp. verum	Diſt. Com. a ☉	Long. comp.	Lat. comp.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″
Nov. 16. 17. 0	83920	♎ 8. 0.25	0.43.20 Auſt.
18. 21. 34	78020	18. 41. 50	1. 17. 30
20. 16. 50	73012	27. 59. 40	1. 44. 25
23. 17. 5	64206	♏ 13. 19. 15	2. 21. 8
26. 17. 0	54799	26. 46. 30	2. 42. 30

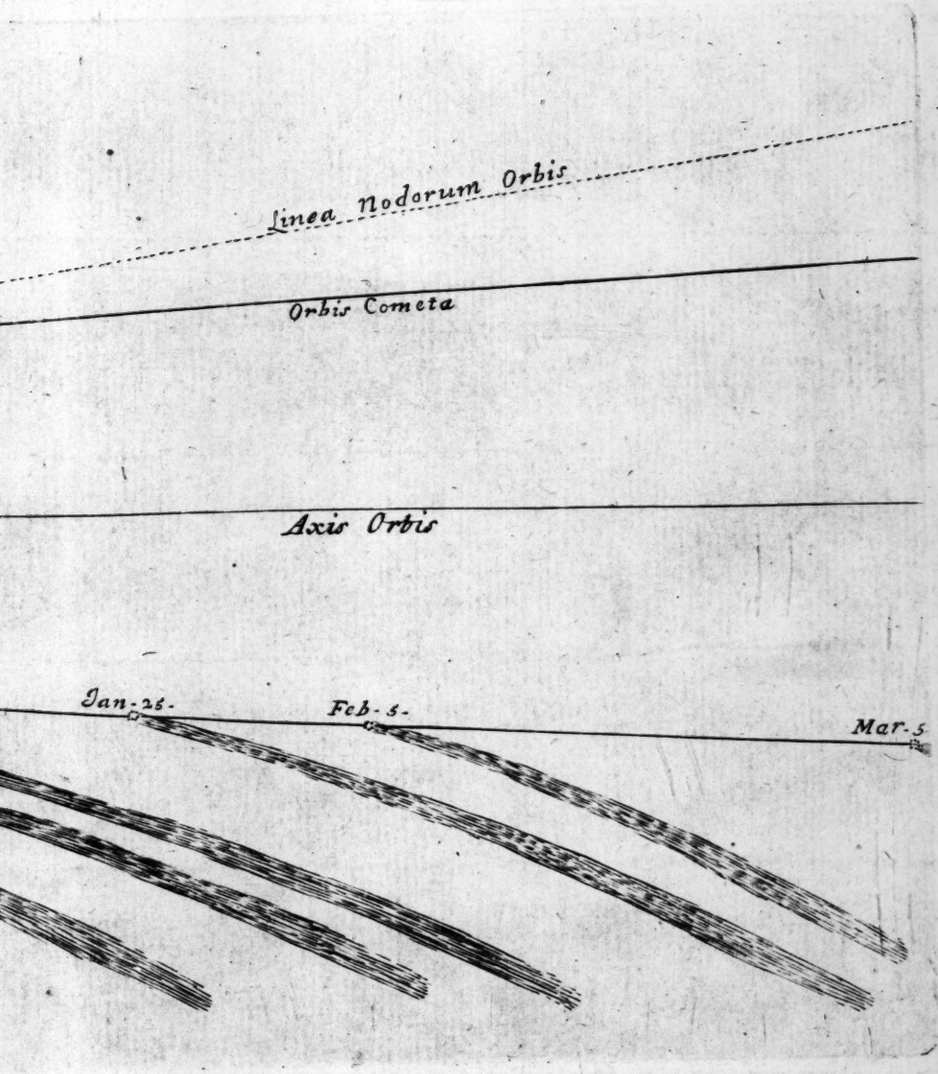
Con-

De Mundi Systemate

Congruunt igitur Obſervationes Aſtronomicæ, tam menſe *Novembri* quam menſibus quatuor ſequentibus, cum motu Cometæ circum Solem in Trajectoria hacce Parabolica, atque adeo unum & eundem Cometam fuiſſe, qui menſe *Novembri* ad Solem deſcendit, & menſibus ſequentibus ab eodem aſcendit, abunde confirmant, ut & hunc Cometam in Trajectoria hacce Parabolica delatum fuiſſe quamproxime. Menſibus *Decembri*, *Januario*, *Februario* & *Martio*, ubi Obſervationes hujus Cometæ ſunt ſatis accuratæ, congruunt eædem cum motu ejus in hac Trajectoria, non minus accurate quam obſervationes Planetarum congruere ſolent cum eorum Theoriis. Menſe *Novembri*, ubi obſervationes ſunt craſſæ, errores non ſunt majores quam qui craſſitudini obſervationum tribuantur. Trajectoria Cometæ bis ſecuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine Virginis & principio Capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus Cometæ plurimum deflectebatur a Circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab Ecliptica in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab Ecliptica in ſeptentrionem, partibus duabus Orbitæ in quibus Cometa tendebat in Solem & redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic Cometa per ſigna fere novem, a Virginis ſcilicet duodecimo gradu ad principium Geminorum, præter ſignum Leonis per quod pergebat antequam videri cœpit: & nulla alia extat Theoria, qua Cometa tantam Cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris*, deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus fere quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et Theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum Theoria Planetarum, & cum accuratis obſervationibus Aſtronomicis accurate congruit, non poteſt non eſſe vera. Cometa tamen ſub finem motus deviabat aliquantulum ab hac Trajectoria Parabolica verſus axem Parabolæ, ut ex erroribus minuti unius primi duorumve in latitudinem menſe *Februario* & *Martio* conſpirantibus, colligere videor; & propterea in Orbe Elliptico

Pag. 465.


Intersectio Sphæræ
Orbis magni cum
plano Trajectoriæ
Nov. 25.
Nov. 21.
Nov. 17.
Sol
Dec. 12.
Dec. 21.
Dec. 29.
Jan. 5.
Jan. 25.


Linea Nodorum Orbis
Orbis Cometa
Axis Orbis
Jan. 25.
Feb. 5.
Mar. 5

liptico circum Solem movebatur, ſpatio annorum pluſquam quingentorum, quantum ex erroribus illis judicare licuit, revolutionem peragens.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & Caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: Obſervationibus ſequentibus in Cauda definienda adhibitis.

Nov. 17 Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18 Cauda 30$^{gr.}$ longa, Solique directe oppoſita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam δ, quæ tunc erat in ♍ 9$^{gr.}$ 54′. *Nov.* 19 in *Mary-Land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10 Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in Aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♍ 19½$^{gr.}$ cum latitudine boreali 34¼$^{gr.}$ circiter. *Dec.* 11 ſurgebat ad uſque caput Sagittæ (*Bayero*, α, β,) deſinens in ♍ 26$^{gr.}$ 43′, cum latitudine boreali 38$^{gr.}$ 34′. *Dec.* 12 tranſibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♎ 4$^{gr.}$, cum latitudine boreali 42½$^{gr.}$ circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5, 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra Cygni Uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat a Stella illa 2^{gr} 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22$^{gr.}$ cum latitudine boreali 61$^{gr.}$. *Dec.* 21 ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans a β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque deſinens in ♓ 24$^{gr.}$ cum latitudine 47½$^{gr.}$. *Dec.* 29 tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54$^{gr.}$ adeoque deſinebat in ♉ 19$^{gr.}$ cum latitudine 35$^{gr.}$. *Jan.* 5 tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus ſuum dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta Obſervationes noſtras) longa erat 40$^{gr.}$; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum, & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum

octo. *Jan.* 13 Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat e regione stellæ x in latere *Persei*. Distantia termini caudæ a circulo Solem & Cometam jungente erat $3^{gr.}\ 50'$, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr.}$. *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerrime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accurate, adeoque declinabat ab oppositione Solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10 Caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Pontbæus* autem *Feb.* 7 se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciproce ut quadratum distantiæ locorum a Sole. Ideoque cum distantia Cometæ a centro Solis *Decemb.* 8 ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in Perihelio versantem ex radiis Solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in Perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis

entis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porro notandum eſt quod Cometa Menſe *Decembri*, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea Menſe *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ e Cometis oriuntur, ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius a capite Cometæ in Terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem a capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes a Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aere clariore tenuius eſt & ægrius ſentitur: in cœlis autem abſque materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa, demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſime contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum Oculorum tum Aeris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo Teleſcopiis

De Mundi Systemate

evaneſcunt, Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit ut radii facile de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in Cometis cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa: ſic enim Cometa Anni 1680, Menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ P. M. *Londini*, verſabatur in ♐ $8^{gr.}$ $41'$ cum latitudine boreali $28^{gr.}$ $6'$, Sole exiſtente in ♍ $18^{gr.}$ $26'$. Et Cometa Anni 1577, *Dec.* 29 verſabatur in ♐ $8^{gr.}$ $41'$ cum latitudine boreali $28^{gr.}$ $40'$, Sole etiam exiſtente in ♍ $18^{gr.}$ $26'$ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum Obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore vero (ex Obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis

planis Orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita in Orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus a Sole directe averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad Orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit a quibus fit deviatio, quæque in recta ſunt linea a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed a capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel oblique ſi corpus moveatur in latus: ita in Cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit a quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De Caudarum agitionibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus Aeris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapo-

De Mundi Systemate

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate Aeris noſtri. Nam Aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quam Aqua ejuſdem ponderis, ideoque Aeris columna cylindrica pedes 850 alta, ejuſdem eſt ponderis cum Aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem Aeris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam Aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius Aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam Aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypotheſi multis experimentis confirmata, quod compreſſio Aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod Aer, ſi aſcendatur a ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra Orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus Aeris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quam ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quam rariſſima. Et quamvis, ob longe craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem Solem verſus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut Aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem Aeris & vaporum, ad omnia illa caudarum Phænomena abunde ſufficere, ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam vero caudarum craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam Aeris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo

Quo temporis ſpatio vapor a capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat a Sole, aſcendere cœpit a capite quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non recta aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa quæ Orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, adeoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui a tempore Perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia Solis celerrime aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni conſtabat qui a tempore Perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quam ob nimiam ſuam tam a Sole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo a capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrime peragunt ac diutiſſime conſervant.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum & progreſſum in partes a Sole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longe tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt a ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ, impediti ſſimis in regionibus noſtris, a radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam a Sole aſcendere.

De Mundi Systemate

dere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu Aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit a Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem a Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi Orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quam longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant a capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem a cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque, facillime accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum Periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuo rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem

riorem latior ſit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi & cum eorum Atmoſphæris miſceri, rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis, requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuo ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuo decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor Spiritum illum, qui Aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem, excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem reſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum a Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus, craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terra diſtantiis, obſcurius apparuit poſt Perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at Menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigienſi*, *Novemb.* 19, Cometa hicce luce ſua quantumvis plumbea & obtuſa, æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam poſtea. Et *D. Storer* literis quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus Menſe *Decembri*, ubi caudam

De Mundi Systemate

maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ, qui Menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſcura & exigua. Nam Anno 1668 *Mart.* 5. St. nov. hora ſeptima veſpertina *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda vero ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & Horizonti fere paralela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput a Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio Menſis *Februarii*, circa veſperam, ad occaſum Solis brumalem. Inde vero & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Pariſienſis, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt, ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore*

tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui e radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur.

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in Orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in Orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne Solem attractione ſua nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. Orbium vero tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iiſdem Orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Trajectoriam Cometæ Graphice inventam corrigere.

Oper. 1. Aſſumatur poſitio plani Trajectoriæ, per Propoſitionem ſuperiorem Graphice inventa; & ſeligantur tria loca Cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quam maxime diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longe a Perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in aſſumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. inſtitutas, deſcribatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, deſcribi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex

De Mundi Systemate

prædictis tribus Cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut ſupra:) deinde etiam Orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ϵ, & tempus totum τ quo area tota $\delta+\epsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ϵ; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & − probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege, ut ſit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et ſi, in operatione prima, I deſignet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, r & ϱ deſignent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem Latera tranſverſa reſpective: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum Latus tranſverſum Trajectoriæ quam Cometa deſcribit. Dato autem Latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q.E.I.*

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & Orbium latera tranſverſa, haud ſatis accurate determinabuntur, niſi per collationem Cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures Cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem Orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem Cometam, in eodem Orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus, dabuntur Orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur Orbes Elliptici.

In

In hunc finem computandæ ſunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypotheſi quod ſint Parabolicæ. Nam hujuſmodi Trajectoriæ cum Phænomenis ſemper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex Trajectoria Parabolica Cometæ anni 1680, quam cum obſervationibus ſupra contuli, ſed etiam ex ea Cometæ illius inſignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, ſed minus accurate. Ex iiſdem obſervationibus, *Halleius* noſter loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis ſic inventis Trajectoriam Cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum aſcendentem in ♊ 21 gr. 13′. 55″, Inclinationem Orbitæ ad planum Eclipticæ 21 gr. 18′. 40″, diſtantiam Perihelii a Nodo in Orbita 49 gr. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8 gr. 40′. 30″ cum Latitudine auſtrina heliocentrica 16 gr. 1′. 45″. Cometam in Perihelio *Novemb.* 24 d. 11 h. 52′. P. M. tempore æquato *Londini*, vel 13 h. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri, & Latus rectum Parabolæ 410286, exiſtente mediocri Terræ a Sole diſtantia 100000. Quam probe loca Cometæ in hoc Orbe computata, congruunt cum obſervationibus, patebit ex Tabula ſequente ab *Halleio* ſupputata.

Temp. Appar. *Gedani*	Obſervata Cometæ diſtantia		Loca obſervata		Loca computata in Orbe	
		gr. ′ ″		gr. ′ ″		gr. ′ ″
Decemb.	a Corde Leonis	46 • 24 • 20	Long. ♎	7 . 1 . 0	♎	7 • 1 • 29
3 d. 18 h. 29½	a Spica Virginis	22 • 52 • 10	Lat. auſt.	21 . 39 . 0		21 • 38 • 50
4 . 18 . 1½	a Corde Leonis	46 • 2 • 45	Long. ♎	6 . 15 . 0	♎	6 • 16 • 5
	a Spica Virginis	23 • 52 • 40	Lat. a.	23 . 24 . 9		22 • 24 • 0
7 . 17 . 48	a Corde Leonis	44 • 48 • 0	Long. ♎	3 . 6 . 0	♎	3 • 7 • 33
	a Spica Virginis	27 • 56 • 40	Lat. a.	25 . 22 . 0		25 • 21 • 40
17 . 14 . 43	a Corde Leonis	53 • 15 • 15	Long. ♌	2 . 56 . 0	♌	2 • 56 • 0
	ab Humero Orionis dext.	45 • 43 • 30	Lat. a.	49 . 25 . 0		49 • 25 • 0
19 • 9 . 25	a Procyone	35 • 13 • 50	Long. ♊	28 . 40 . 30	♊	28 • 43 • 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	52 • 56 • 0	Lat. a.	45 . 48 . 0		45 • 46 • 0
20 . 9 . 53½	a Procyone	40 • 49 • 0	Long. ♊	13 . 3 . 0	♊	13 • 5 • 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	40 • 4 • 0	Lat. a.	39 . 54 . 0		39 • 53 • 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis	26 • 21 • 25	Long. ♊	2 . 16 . 0	♊	2 • 18 • 30
	a Lucid. Mandib. Ceti	29 • 28 • 0	Lat. a.	33 . 41 . 0		33 • 39 • 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis	29 • 47 • 0	Long. ♉	24 . 24 . 0	♉	24 • 27 • 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	20 • 29 • 30	Lat. a.	27 . 45 . 0		27 • 46 • 0
26 . 7 . 58	a Lucida Arietis	23 • 20 • 0	Long. ♉	9 . 0 . 0	♉	9 • 2 • 28
	ab Aldebaran	26 • 44 • 0	Lat. a.	12 . 36 . 0		12 • 34 • 13

Temp.

DE MUNDI SYSTEMATE

Temp. Appar. *Gedani*	Obſervata Cometæ diſtantia		Loca obſervata		Loca computata in Orbe.
d. h. ′		gr. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis	20 • 45 • 0	Long. ♉	7 . 5 . 40	♉ 7 • 8 • 54
	ab Aldebaran	28 • 10 • 0	Lat. a.	10 . 23 . 0	10 • 23 • 13
28 . 7 . 39	a Lucida Arietis	18 • 29 • 0	Long. ♉	5 . 24 . 45	♉ 5 • 27 • 52
	a Palilicio	29 • 37 • 0	Lat. a.	8 . 22 . 50	8 • 23 • 37
31 . 6 . 45	a Cing. Androm.	30 • 48 • 10	Long. ♉	2 . 7 . 40	♉ 2 • 8 • 20
	a Palilicio	32 • 53 • 30	Lat. a.	4 . 13 . 0	4 • 16 • 25
Jan.					
7 . 7 . 37½	a Cing. Androm.	25 • 11 • 0	Long. ♈	28 . 24 . 47	♈ 28 • 24 • 0
	a Palilicio	37 • 12 • 25	Lat. bor.	0 . 54 . 0	0 • 53 • 0
24 . 7 . 29	a Palilicio	40 • 5 • 0	Long. ♈	26 . 29 . 15	♈ 26 • 28 • 50
	a Cing. Androm.	20 • 32 • 15	Lat. bor.	5 . 25 . 50	5 • 26 • 0
Mar.					
1 . 8 . 6	Cometa ab *Hookio* prope ſecundam Arietis obſervabatur, *Mar.* 1ᵈ. 7ʰ. 0′ *Londini*, cum		Long. ♈	29 . 17 . 20	♈ 29 • 18 • 20
			Lat. bor.	8 . 37 . 10	8 • 36 • 12

Apparuit hic Cometa per menſes tres, ſignaque fere ſex deſcripſit, & uno die gradus fere viginti confecit. Curſus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, Theoria a principio ad finem cum obſervationibus non minus accurate congruit, quam Theoriæ Planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent, ut inſpicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi Cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta prima ab angulo inter Nodum aſcendentem & Perihelium, ſeu conſtituendo angulum illum $49^{gr.}\ 27'.\ 18''$. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) parallaxis annua inſignis fuit, & inde demonſtratur motus annuus Terræ in Orbe magno.

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in Orbe cujus planum cum plano Eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♍ $23^{gr.}\ 23'$; Inclinatio Orbitæ ad Eclipticam $83^{gr.}\ 11'$; Perihelium in ♊ $25^{gr.}\ 29'.\ 30''$; Diſtantia perihelia a Sole 56020, exiſtente radio Orbis magni 100000, & tempore Perihelii *Julii* $2^{d.}\ 3^{h.}\ 50'$. Loca autem Cometæ in hoc Orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in Tabula ſequente.

1683 Temp.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	☊ 1. 2.30	♎ 13. 5.42	29.28.13	♎ 13. 6.42	29.28.20	+ 1. 0	+ 0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37.48	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+ 1.55	+ 0.50
17.10.20	4 45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+ 1.34	+ 0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+ 1. 3	— 1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	— 0.53	— 1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	— 0.39	— 0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+ 0. 1	— 2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	— 0.46	+ 1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	— 1.25	+ 1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	— 1.51	+ 2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	— 2. 2	— 0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	♎ 3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	— 4.30	— 5.32
16.15.10	3.48. 2	0 43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	— 1.12	— 0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Auſtr.	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Auſtr.	— 3.48	— 2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.53	11. 7.12	5.16.50	— 0. 2	— 0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	— 1. 1	— 0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	— 1.31	+ 0.20

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ retrogradi qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21$^{gr.}$ 16′. 30″. Inclinatio Orbitæ ad planum Ecliptícæ 17$^{gr.}$ 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2$^{gr.}$ 52′. 50″. Diſtantia perihelia a Sole 58328. Et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4$^{d.}$ 7$^{h.}$ 39′. Loca vero ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per Theoriam computatis collata, exhibentur in Tabula ſequente.

1682 Temp. Appar	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	☊ 18.14.28	25.50. 7	☊ 18.14.40	25.49.55	— 0.12	+ 0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14 42	24.46.22	26.12.52	+ 0. 1	+ 1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	— 0.47	+ 2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	— 0.10	+ 1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37 54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0.43	— 0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3.49	+ 3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11 33.51	+ 1.22	— 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	— 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0.45

His exemplis abunde ſatis manifeſtum eſt, quod motus Cometarum per Theoriam a nobis expoſitam non minus accurate exhibentur,

De Mundi Systemate

hibentur, quam ſolent motus Planetarum per eorum Theorias. Et propterea Orbes Cometarum per hanc Theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum Cometæ in quolibet Orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum Orbium Ellipticorum latera tranſverſa & Apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus qui apparuit anno 1607, deſcripſit Orbem cujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′. Inclinatio plani Orbis ad planum Eclipticæ erat 17gr. 2′. Perihelium erat in ♒ 2gr. 16′, & diſtantia perihelia a Sole erat 58680, exiſtente radio Orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic Orbis quamproxime cum Orbe Cometæ qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa ſpatio annorum 75, & axis major Orbis ejus erit ad axem majorem Orbis magni, ut $\sqrt{c}:75\times75$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia aphelia Cometæ hujus a Sole, erit ad diſtantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit Orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt ſi Cometa, ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc Orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius aſcendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum a Sole diſtantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non eſt expectandum ut Cometa idem, in eodem Orbe & iiſdem temporibus periodicis, accurate redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ a cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco (more Planetarum) ſed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis ſuis ubi tardiſſime moventur, quam longiſſime diſtent ab invicem & ſe mutuo quam minime trahant. Qua de cauſa Cometæ qui altius deſcendunt, adeoque tardiſſime moventur in Apheliis, debent altius aſcendere.

Cometa qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat a Sole in Perihelio ſuo quam parte ſexta diametri Solis; & propter ſummam velocitatem in vicinia illa, & denſitatem aliquam Atmoſphæræ Solis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari,

dari & propius ad Solem accedere: & ſingulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio ubi tardiſſime movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari poteſt & ſubinde in Solem incidere. Sic etiam Stellæ fixæ quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro Stellis Novis haberi. Vapores autem qui ex Sole & Stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in Atmoſphæras Planetarum, & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare. Decreſcente autem corpore Solis motus medii Planetarum circum Solem paulatim tardeſcent, & creſcente Terra motus medius Lunæ circum Terram paulatim augebitur. Et collatis quidem obſervationibus Eclipſium *Babylonicis* cum iis *Albategnii* & cum hodiernis, *Halleius* noſter motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum, paulatim accelerari, primus omnium quod ſciam deprehendit.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypotheſis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unuſquiſque radio ad Solem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in duplicata ratione diſtantiarum a Sole. Ut periodica Planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in eadem diſtantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conſerventur & tranquille natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis Solaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes ſuos ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus Cometarum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cælorum partes, quod fieri non poteſt niſi Vortices tollantur.

Projectilia, in aere noſtro, ſolam aeris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc

De Mundi Systemate

Vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cælestium quæ sunt supra atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrime moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus specie & positione datis, secundum leges supra expositas, perpetuo revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hasce minime potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium Planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis Mechanicis; siquidem Cometæ in Orbibus valde eccentricis, & in omnes cælorum partes libere feruntur. Quo motus genere Cometæ per Orbes Planetarum celerrime & facillime transeunt, & in Apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissime distant ab invicem, & se mutuo quam minime trahunt. Elegantissima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non nisi consilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si Stellæ fixæ sint centra similium systematum; hæc omnia simili consilio constructa, suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux Fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, sed ut universorum Dominus; & propter dominium suum Dominus Deus * παντοκράτωρ dici solet. Nam *Deus* est vox relativa & ad servos refertur: & *Deitas* est dominatio Dei non in corpus proprium, sed in servos. *Deus summus* est Ens æternum, infinitum, absolute perfectum; sed Ens utcunque perfectum sine dominio, non est *Dominus Deus*. Dicimus enim *Deus meus, Deus vester, Deus Israelis:* sed non dicimus *Æternus meus, Æternus vester, Æternus Israelis*; non dicimus *Infinitus meus, Infinitus vester, Infinitus Israelis*; non dicimus *Perfectus meus, Perfectus vester, Perfectus Israelis.* Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox *Deus* passim significat *Dominum*, sed omnis Dominus non est Deus. Dominatio Entis spiritualis *Deum* constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione vera sequitur, Deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse vel summe perfectum.

* Id est, *Imperator universalis.*

fectum. *Æternus* eſt & *Infinitus, Omnipotens* & *Omniſciens*, id eſt, durat ab æterno in æternum & adeſt ab infinito in infinitum, omnia regit & omnia cognoſcit quæ fiunt aut ſciri poſſunt. Non eſt æternitas vel infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio vel ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique durationem & ſpatium, æternitatem & infinitatem conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*; certe rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam nuſquam*. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo * continentur & moventur univerſa, ſed abſque mutua *paſſione*. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentia Dei. Deum ſummum neceſſario exiſtere in confeſſo eſt: Et eadem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi & agendi; ſed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus ideam non habet colorum, ſic nos ideam non habemus modorum quibus Deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus Subſtantia minime cognoſcimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum ſonos, tangimus tantum ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores; Intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nulla actione reflexa cognoſcimus, & multo minus ideam habemus ſubſtantiæ Dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ſuas & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras, & cauſas finales; veneramur autem & colimus ob dominium. Deus enim ſine dominio, providentia, & cauſis finalibus, nihil aliud eſt quam Fatum & Natura. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis diſſerere, ad *Philoſophiam Experimentalem* pertinet.

* Ita ſentiebant veteres, *Aratus* in Phænom: ſub initio. *Paulus* in Act. 7. 27, 28. *Moſes* Deut. 4. 39 & 10. 14. *David* Pſal. 139. 7, 8. *Solomon* Reg. 8. 27. *Job.* 22. 12. *Jeremias* Propheta 23. 23, 24.

Hactenus Phænomena cælorum & maris noſtri per Vim gravitatis expoſui, ſed cauſam Gravitatis nondum aſſignavi. Oritur utique hæc Vis a cauſa aliqua quæ penetrat ad uſque centra Solis

De Mundi Systemate

& Planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum in quas agit (ut ſolent cauſæ Mechanicæ,) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicata ratione diſtantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in ſingulas Solis particulas, & recedendo a Sole decreſcit accurate in duplicata ratione diſtantiarum ad uſque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifeſtum eſt, & ad uſque ultima Cometarum Aphelia, ſi modo Aphelia illa quieſcant. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, *Hypotheſis* vocanda eſt; & Hypotheſes ſeu Metaphyſicæ, ſeu Phyſicæ, ſeu Qualitatum occultarum, ſeu Mechanicæ, in *Philoſophia Experimentali* locum non habent. In hac Philoſophia Propoſitiones deducuntur ex Phænomenis, & redduntur generales per Inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quod Gravitas revera exiſtat, & agat ſecundum leges a nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuſcula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Senſatio omnis excitatur, & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus Spiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & a cerebro in muſculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritus accurate determinari & monſtrari debent.

FINIS.

Pag. 478, *lin.* 25, *lege:* duodecim minuta ſecunda.

INDEX RERUM ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes factæ ſunt ad normam ſequentis Exempli.* III, 10: 444, 20: 471, 28 *deſignant Libri tertii Propoſitionem decimam: Paginæ* 444ta *lineam* 20am: *Paginæ* 471mæ *lineam* 28am.

A.

Æquinoctiorum præceſſio
- cauſæ hujus motus indicantur III, 21
- quantitas motus ex cauſis computatur III, 39

Aeris
- denſitas ad quamlibet altitudinem colligitur ex Prop. 22. Lib. II. quanta ſit ad altitudinem unius ſemidiametri Terreſtris oſtenditur 470, 11
- elaſtica vis quali cauſæ tribui poſſit II, 23
- gravitas cum Aquæ gravitate collata 470, 3
- reſiſtentia quanta ſit, per Experimenta Pendulorum colligitur 286, 28; per Experimenta corporum cadentium & Theoriam accuratius invenitur 327, 13

Anguli contactus non ſunt omnes ejuſdem generis, ſed alii aliis infinite minores p. 32

Apſidum motus expendltur I, Sect. 9

Areæ quas corpora in gyros acta, radiis ad centrum virium ductis, deſcribunt, conferuntur cum temporibus deſcriptionum I, 1, 2, 3, 58, 65

Attractio corporum univerſorum demonſtratur III, 7; qualis ſit hujus demonſtrationis certitudo oſtenditur 358, 28: 484, 11

Attractionis cauſam vel modum nullibi definit Author 5, 17: 147, 32: 172, 31: 483, 34.

C.

Cæli
- reſiſtentia deſtituuntur III, 10: 444, 20: 471, 28; & propterea Fluido omni corporeo 328, 18
- tranſitum Luci præbent abſque ulla refractione 467, 33

Calore virga ferrea comperta eſt augeri longitudine 386, 4

Calor Solis quantus ſit in diverſis a Sole diſtantiis 466, 20
- quantus apud Mercurium 372, 12
- quantus apud Cometam anni 1680 in Perihelio verſantem 466, 22

Centrum commune gravitatis corporum plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis p. 17

Centrum commune gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quieſcere III, 11; confirmatur ex Cor. 2. Prop. 14. Lib. III.

Centrum commune gravitatis Terræ & Lunæ motu annuo percurrit Orbem magnum 376, 6 quibus intervallis diſtat a Terra & Luna 430, 22

Centrum Virium quibus corpora revolventia in Orbibus retinentur
- quali Arearum indicio invenitur 38, 14
- qua ratione ex datis revolventium velocitatibus invenitur I, 5

Circuli circumferentia, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum deſcribi poteſt a corpore revolvente I, 4, 7, 8

Cometæ
- Genus ſunt Planetarum, non Meteororum 444, 24: 466, 15
- Luna ſuperiores ſunt, & in regione Planetarum verſantur p. 439
- Diſtantia eorum qua ratione per Obſervationes colligi poteſt quamproxime 439, 21
- Plures obſervati ſunt in hemiſphærio Solem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito; & unde hoc fiat 444, 5
- Splendent luce Solis a ſe reflexa 444, 4; Lux illa quanta eſſet ſolet 441, 12
- Cinguntur Atmoſphæris ingentibus 442, 12: 444, 27
- Qui ad Solem propius accedunt ut plurimum minores eſſe exiſtimantur 475, 7
- Quo fine non comprehenduntur Zodiaco (more Planetarum) ſed in omnes cælorum regiones varie feruntur 480, 30
- Poſſunt aliquando in Solem incidere & novum illi alimentum ignis præbere 480, 37
- Uſus eorum ſuggeritur 473, 1: 481, 7

Come-

Cometarum caudæ
avertuntur a Sole 468, 39
maximæ ſunt & fulgentiſſimæ ſtatim poſt tranſitum per viciniam Solis 467, 8
inſignis earum raritas 470, 32
origo & natura earundem 442, 19: 467, 13
quo temporis ſpatio a capite aſcendunt 471, 1
Cometæ
Moventur in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus, & radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales. Et quidem in Ellipſibus moventur ſi in Orbem redeunt, hæ tamen Parabolis erunt maxime finitimæ III, 40
Trajectoria Parabolica ex datis tribus Obſervationibus invenitur III, 41; Inventa corrigitur III, 42
Locus in Parabola invenitur ad tempus datum 445, 30: I, 30
Velocitas cum velocitate Planetarum confertur 445, 17
Cometa annorum 1664 & 1665
Hujus motus obſervatus expenditur, & cum Theoria accurate congruere deprehenditur p. 477
Cometa annorum 1680 & 1681
Hujus motus obſervatus cum Theoria accurate congruere invenitur p. 455 & ſeqq.
Videbatur in Ellipſi revolvi ſpatio annorum pluſquam quingentorum 464, 37
Trajectoria illius & Cauda ſingulis in locis delineantur p. 465
Cometa anni 1682
Hujus motus accurate reſpondet Theoriæ p. 479
Comparuiſſe viſus eſt anno 1607, iterumque rediturus videtur periodo 75 annorum 480, 6
Cometa anni 1683
Hujus motus accurate reſpondet Theoriæ p. 478
Curvæ diſtinguuntur in Geometricæ rationales & Geometricæ irrationales 100, 5
Curvatura figurarum qua ratione æſtimanda ſit 235, 28: 398, 33
Cycloidis ſeu Epicycloidis
rectificatio I, 48. 49: 142, 18
Evoluta I, 50: 142, 22
Cylindri attractio ex particulis trahentibus compoſiti quarum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 198, 1

D.

Dei Natura p. 482 & 483
Deſcenſus gravium in vacuo quantus ſit, ex longitudine Penduli colligitur 379, 1
Deſcenſus vel Aſcenſus rectilinei ſpatia deſcripta, tempora deſcriptionum & velocitates acquiſitæ conferuntur, poſita cujuſcunque generis vi centripeta I, Sect. 7
Deſcenſus & Aſcenſus corporum in Mediis reſiſtentibus II, 3, 8, 9, 40, 13, 14

E.

Ellipſis
qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 10, 64
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 11

F.

Fluidi definitio p. 260
Fluidorum denſitas & compreſſio quas leges habent, oſtenditur II, Sect. 5
Fluidorum per foramen in vaſe factum effluentium determinatur motus II, 36
Fumi in camino aſcenſus obiter explicatur 472, 4

G.

Graduum in Meridiano Terreſtri menſura exhibetur, & quam ſit exigua inæqualitas oſtenditur ex Theoria III, 20
Gravitas
diverſi eſt generis a vi Magnetica 368, 29
mutua eſt inter Terram & ejus partes 22, 18
ejus cauſa non aſſignatur 483, 34
datur in Planetas univerſos 365, 15; & pergendo a ſuperficiebus Planetarum ſurſum decreſcit in duplicata ratione diſtantiarum a centro III, 8, deorſum decreſcit in ſimplici ratione quamproxime III, 9
datur in corpora omnia, & proportionalis eſt quantitati materiæ in ſingulis III, 7
Gravitatem eſſe vim illam qua Luna retinetur in Orbe III, 4, computo accuratiori comprobatur 430, 25
Gravitatem eſſe vim illam qua Planetæ primarii & Satellites Jovis & Saturni retinentur in Orbibus III, 5

H.

Hydroſtaticæ principia traduntur II, Sect. 5
Hyperbola
qua lege vis centrifugæ tendentis a figuræ centro deſcribitur a corpore revolvente 47, 26
qua lege vis centrifugæ tendentis ab umbilico figuræ deſcribitur a corpore revolvente 51, 6
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 12
Hypotheſes cujuſcunque generis rejiciuntur ab hac Philoſophia 484, 8.

I.

Inertiæ vis definitur p. 2
Jovis
distantia a Sole 361, 1
semidiameter apparens 371, 3
semidiameter vera 371, 14
attractiva vis quanta sit 370, 33
pondus corporum in ejus superficie 371, 19
densitas 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
perturbatio a Saturno quanta sit 375, 33
diametrorum proportio computo exhibetur 381, 27
conversio circum axem quo tempore absolvitur 381, 25
cingulæ causa subindicatur 444 32.

L.

Locus definitur, & distinguitur in absolutum & relativum 6, 12
Loca corporum in Sectionibus conicis motorum inveniuntur ad tempus assignatum I, Sect. 6
Lucis
propagatio non est instantanea 207, 5; non fit per agitationem Medii alicujus Ætherei 342, 36
velocitas in diversis Mediis diversa I, 95
reflexio quædam explicatur I, 96
refractio explicatur I, 94; non fit in puncto solum incidentiæ 207, 29
incurvatio prope corporum terminos Experimentis observata 207, 8
Lunæ
corporis figura computo colligitur III, 38
inde causa patefacta, cur eandem semper faciem in Terram obvertat 432, 9
& librationes explicantur III, 17
diameter mediocris apparens 430, 12
diameter vera 430, 17
pondus corporum in ejus superficie 430, 20
densitas 430, 15
quantitas materiæ 430, 19
distantia mediocris a Terra quot continet maximas Terræ semidiametros 430, 25, quot mediocres 431, 18
parallaxis maxima in longitudinem paulo major est quam parallaxis maxima in latitudinem 387, 8
vis ad Mare movendum quanta sit III, 37; non sentiri potest in Experimentis pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque 430, 1
tempus periodicum 430, 32
tempus revolutionis synodicæ 398, 1
motus medius cum diurno motu Terræ collatus paulatim accelerari deprehenditur ab *Halleio* 481, 16
Lunæ motus & motuum inæqualitates a causis suis derivantur III, 22: p. 421 & seqq.
tardius revolvitur Luna dilatato Orbe, in perihelio Terræ; citius in aphelio, contracto Orbe III, 22: 421, 6
tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Apogæi Syzygiis cum Sole; citius in Quadraturis Apogæi, contracto Orbe 422, 1
tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Syzygiis Nodi cum Sole; citius in Quadraturis Nodi, contracto Orbe 422, 21
tardius movetur in Quadraturis suis cum Sole, citius in Syzygiis; & radio ad Terram ducto describit aream pro tempore minorem in priore casu, majorem in posteriore III, 22: Inæqualitas harum Arearum computatur III, 26. Orbem insuper habet magis curvum & longius a Terra recedit in priore casu, minus curvum habet Orbem & propius ad Terram accedit in posteriore III, 22. Orbis hujus figura & proportio diametrorum ejus computo colligitur III, 28. Et subinde proponitur methodus inveniendi distantiam Lunæ a Terra ex motu ejus horario III, 27
Apogæum tardius movetur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
Apogæum ubi est in Solis Syzygiis, maxime progreditur; in Quadraturis regreditur III, 22: 422, 37
Eccentricitas maxima est in Apogæi Syzygiis cum Sole, minima in Quadraturis III, 22: 422, 39
Nodi tardius moventur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
Nodi quiescunt in Syzygiis suis cum Sole, & velocissime regrediuntur in Quadraturis III, 22. Nodorum motus & inæqualitates motuum computantur ex Theoria Gravitatis III, 30, 31, 32, 33
Inclinatio Orbis ad Eclipticam maxima est in Syzygiis Nodorum cum Sole, minima in Quadraturis I, 66 Cor. 10. Inclinationis variationes computantur ex Theoria Gravitatis III, 34, 35
Lunarium motuum Æquationes ad usus Astronomicos p. 421 & seqq.
Motus medii Lunæ
Æquatio annua 421, 4
Æquatio semestris prima 422, 1
Æquatio semestris secunda 422, 21
Æquatio centri prima 423, 20: p. 101 & seqq.
Æquatio centri secunda 424, 15
Variatio prima III, 29
Variatio secunda 425, 5

Motus

Motus medii Apogæi
Æquatio annua 421, 21
Æquatio ſemeſtris 422, 37
Eccentricitatis
Æquatio ſemeſtris 422, 37
Motus medii Nodorum
Æquatio annua 421, 21
Æquatio ſemeſtris III, 33
Inclinationis Orbitæ ad Eclipticam
Æquatio ſemeſtris 420, 22
Lunarium motuum Theoria, qua Methodo ſtabilienda ſit per Obſervationes 425, 33.

M.

Magnetica vis 22, 13 : 271, 25 : 368, 29 : 431, 23
Maris æſtus a cauſis ſuis derivatur III, 24, 36, 37
Martis
diſtantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Materiæ
quantitas definitur p. 1
vis inſita ſeu vis inertiæ definitur p. 2
vis impreſſa definitur p. 2
extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertiæ, gravitas, qua ratione innoteſcunt 357, 16: 484, 10
diviſibilitas nondum conſtat 358, 18
Materia ſubtilis *Carteſianorum* ad examen quoddam revocatur 292, 12
Materia vel ſubtiliſſima Gravitate non deſtituitur 368, 1
Mechanicæ, quæ dicuntur, Potentiæ explicantur & demonſtrantur p. 14 & 15: p. 23
Mercurii
diſtantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Methodus
Rationum primarum & ultimarum I, Sect. 1
Tranſmutandi figuras in alias quæ ſunt ejuſdem Ordinis Analytici I, Lem. 22. pag. 79
Fluxionum II, Lem. 2. p. 224
Differentialis III, Lemm. 5 & 6. pagg. 446 & 447
Inveniendi Curvarum omnium quadraturas proxime veras 447, 8
Serierum convergentium adhibetur ad ſolutionem Problematum difficiliorum p. 127: 128: 202: 235: 414
Motus quantitas definitur p. 1
Motus abſolutus & relativus p. 6: 7: 8: 9 ab invicem ſecerni poſſunt, exemplo demonſtratur p. 10
Motus Leges p. 12 & ſeqq.
Motuum compoſitio & reſolutio p. 14
Motus corporum congredientium poſt reflexionem, quali Experimento recte colligi poſſunt, oſtenditur 19, 21
Motus corporum
in Conicis ſectionibus eccentricis I, Sect. 3
in Orbibus mobilibus I, Sect. 9
in Superficiebus datis & Funependulorum motus reciprocus I, Sect. 10
Motus corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium I, Sect. 11
Motus corporum Minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur I, Sect. 14
Motus corporum quibus reſiſtitur
in ratione velocitatis II, Sect. 1
in duplicata ratione velocitatis II, Sect. 2
partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata II, Sect. 3
Motus
corporum ſola vi inſita progredientium in Mediis reſiſtentibus II, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12: 302, 1
corporum recta aſcendentium vel deſcendentium in Mediis reſiſtentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 3, 8, 9, 40, 13, 14
corporum projectorum in Mediis reſiſtentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 4, 10
corporum circumgyrantium in Mediis reſiſtentibus II, Sect. 4
corporum Funependulorum in Mediis reſiſtentibus II, Sect. 6
Motus & reſiſtentia Fluidorum II, Sect. 7
Motus per Fluida propagatus II, Sect. 8
Motus circularis ſeu Vorticoſus Fluidorum II, Sect. 9
Mundus originem non habet ex cauſis Mechanicis p. 482, 12.

N.

Navium conſtructioni Propoſitio non inutilis 300, 4.

O.

Opticarum ovalium inventio quam *Carteſius* celaverat I, 97. *Carteſiani* Problematis generalior ſolutio I, 98
Orbitarum inventio
quas corpora deſcribunt, de loco dato data cum velocitate, ſecundum datum rectam egreſſa; ubi vis centripeta eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ & vis illius quantitas abſoluta cognoſcitur I, 17
quas corpora deſcribunt ubi vires centripetæ ſunt reciproce ut cubi diſtantiarum 45, 18: 118, 27: 125, 25
quas corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata deſcribunt I, Sect. 8.

P.

Parabola, qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ, deſcribitur a corpore revolvente I, 13
Pendulorum affectiones explicantur I, 50, 51, 52, 53: II, Sect. 6.
Pendulorum iſochronorum longitudines diverſæ in diverſis locorum Latitudinibus inter ſe conferuntur, tum per Obſervationes, tum per Theoriam Gravitatis III, 20
Philoſophandi Regulæ p. 357
Planetæ
non deferuntur a Vorticibus corporeis 352, 37: 354, 25: 481, 21
Primarii
Solem cingunt 360, 7
moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis III, 13
radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 361, 15: III, 13
temporibus periodicis revolvuntur quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a Sole 360, 17: III, 13 & I, 15
retinentur in Orbibus ſuis a vi Gravitatis quæ reſpicit Solem, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab ipſius centro III, 2, 5
Secundarii
moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Primariorum III, 22
radiis ad Primarios ſuos ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 359, 3, 22: 361, 27: III, 22
temporibus periodicis revolvuntur quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a Primariis ſuis 359, 3, 22: III, 22 & I, 15
retinentur in Orbibus ſuis a vi Gravitatis quæ reſpicit Primarios, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab eorum centris III, 1, 3, 4, 5
Planetarum
diſtantiæ a Sole 361, 1
Orbium Aphelia & Nodi prope quieſcunt III, 14
Orbes determinantur III, 15, 16
loca in Orbibus inveniuntur I, 31
denſitas calori quem a Sole recipiunt, accommodatur 372, 7
converſiones diurnæ ſunt æquabiles III, 17
axes ſunt minores diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur III, 18
Pondera corporum
in Terram vel Solem vel Planetam quemvis, paribus diſtantiis ab eorum centris, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus III, 6
non pendent ab eorum formis & texturis 367, 35
in diverſis Terræ regionibus inveniuntur & inter ſe comparantur III, 20
Problematis
Kepleriani ſolutio per Trochoidem & per Approximationes I, 31
Veterum de quatuor lineis, a *Pappo* memorati, a *Carteſio* per calculum Analyticum tentati, compoſitio Geometrica 70, 19
Projectilia, ſepoſita Medii reſiſtentia, moveri in Parabola colligitur 47, 23: 202, 23: 236, 29
Projectilium motus in Mediis reſiſtentibus II, 4, 10
Pulſuum Aeris, quibus Soni propagantur, determinantur intervalla ſeu latitudines II, 50: 344, 18. Hæc intervalla in apertarum Fiſtularum ſonis æquari duplis longitudinibus Fiſtularum veroſimile eſt 344, 26

Q.

Quadratura generalis Ovalium dari non poteſt per finitos terminos I, Lem, 28. p. 98
Qualitates corporum qua ratione innoteſcunt & admittuntur 357, 16
Quies vera & relativa p. 6, 7, 8, 9.

R.

Reſiſtentiæ quantitas
in Mediis non continuis II, 35
in Mediis continuis II, 38
in Mediis cujuſcunque generis 302, 32
Reſiſtentiarum Theoria confirmatur
per Experimenta Pendulorum II, 30, 31, Sch. Gen. p. 284
per Experimenta corporum cadentium II, 40, Sch. p. 319
Reſiſtentia Mediorum
eſt ut eorundem denſitas, cæteris paribus 290, 29: 291, 35: II, 33, 35, 38: 327, 14
eſt in duplicata ratione velocitatis corporum quibus reſiſtitur, cæteris paribus 219, 24: 284, 33; II, 33, 35, 38: 324, 23
eſt in duplicata ratione diametri corporum Sphæricorum quibus reſiſtitur, cæteris paribus 288, 4: 289, 11: II, 33, 35, 38: Sch. p. 319
non minuitur ab actione Fluidi in partes poſticas corporis moti 312, 23
Reſiſtentia Fluidorum duplex eſt; oriturque vel ab Inertia materiæ fluidæ, vel ab Elaſticitate, Tenacitate & Frictione partium ejus 318, 1. Reſiſtentia quæ ſentitur in Fluidis fere tota eſt prioris generis 326, 32, & minui non poteſt per ſubtilitatem partium Fluidi, manente denſitate 328, 7
Reſiſtentiæ Globi ad reſiſtentiam Cylindri proportio, in Mediis non continuis II, 34

Reſiſtentia quam patitur a Fluido fruſtum Conicum, qua ratione fiat minima 299, 30
Reſiſtentiæ minimæ Solidum 300, 15.

S.

Satellitis
Jovialis extimi elongatio maxima heliocentrica a centro Jovis 370, 35
Hugeniani elongatio maxima heliocentrica a centro Saturni 371, 5
Satellitum
Jovialium tempora periodica & diſtantiæ a centro Jovis 359, 12
Saturniorum tempora periodica & diſtantiæ a centro Saturni 360, 1
Jovialium & Saturniorum inæquales motus a motibus Lunæ derivari poſſe oſtenditur III, 23
Saturni
diſtantia a Sole 361, 1
ſemidiameter apparens 371, 9
ſemidiameter vera 371, 14
vis attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
perturbatio a Jove quanta ſit 375, 16
diameter apparens Annuli quo cingitur 371, 8
Sectiones Conicæ, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum, deſcribuntur a corporibus revolventibus 58, 20
Sectionum Conicarum deſcriptio Geometrica
ubi dantur Umbilici I, Sect. 4
ubi non dantur Umbilici I, Sect. 5. ubi dantur Centra vel Aſymptoti 87, 9
Seſquiplicata ratio definitur 31, 40
Sol
circum Planetarum omnium commune gravitatis centrum movetur III, 12
ſemidiameter ejus mediocris apparens 371, 12
ſemidiameter vera 371, 14
parallaxis ejus horizontalis 370, 33
parallaxis menſtrua 376, 4
vis ejus attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas ejus 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
vis ejus ad perturbandos motus Lunæ 363, 15: III, 25
vis ad Mare movendum III, 36
Sonorum
natura explicatur II, 43, 47, 48, 49, 50
propagatio divergit a recto tramite 332, 9, fit per agitationem Aeris 343, 1
velocitas computo colligitur 343, 8, paululum major eſſe debet Æſtivo quam Hyberno tempore, per Theoriam 344, 11
ceſſatio fit ſtatim ubi ceſſat motus corporis ſonori 344, 29
augmentatio per tubos ſtenterophonicos 344, 32
Spatium
abſolutum & relativum p. 6, 7
non eſt æqualiter plenum 368, 16
Sphæroidis attractio, cujus particularum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 198, 21
Spiralis quæ ſecat radios ſuos omnes in angulo dato, qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis deſcribi poteſt a corpore revolvente, oſtenditur I, 9: II, 15, 16
Spiritum quendam corpora pervadentem & in corporibus latentem, ad plurima naturæ phænomena ſolvenda, requiri ſuggeritur 484, 17
Stellarum fixarum
quies demonſtratur 376, 18
radiatio & ſcintillatio quibus cauſis referendæ ſint 467, 38
Stellæ Novæ unde oriri poſſint 481, 5
Subſtantiæ rerum omnium occultæ ſunt 483, 22

T.

Tempus abſolutum & relativum p. 5, 7
Temporis Æquatio Aſtronomica per Horologium oſcillatorium & Eclipſes Satellitum Jovis comprobatur 7, 15
Tempora periodica corporum revolventium in Ellipſibus, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 15
Terræ
dimenſio per *Picartum* 378, 11, per *Caſſinum* 378, 21, per *Norwoodum* 378, 28
figura invenitur, & proportio diametrorum, & menſura graduum in Meridiano III, 19, 20
altitudinis ad Æquatorem ſupra altitudinem ad Polos quantus ſit exceſſus 381, 7: 387, 1
ſemidiameter maxima, minima & mediocris 387, 10
globus denſior eſt quam ſi totus ex Aqua conſtaret 372, 31
globus denſior eſt ad centrum quam ad ſuperficiem 386, 1
molem indies augeri veroſimile eſt 473, 18: 481, 13
axis nutatio III, 21
motus annuus in Orbe magno demonſtratur III, 12, 13: 478, 26
Eccentricitas quanta ſit 421, 15
Aphelii motus quantus ſit 376, 33.

V.

Vacuum datur, vel ſpatia omnia (ſi dicantur eſſe plena) non ſunt æqualiter plena 328, 18: 368, 25

Velocitas maxima quam Globus, in Medio reſiſtente cadendo, poteſt acquirere II, 38, Cor. 2
Velocitates corporum in Sectionibus conicis motorum, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 16
Veneris
diſtantia a Sole 361, 1
tempus periodicum 370, 23
Aphelii motus 376, 33
Virium compoſitio & reſolutio p. 14
Vires attractivæ corporum
ſphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compoſitorum, expenduntur I, Sect. 12
non ſphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compoſitorum, expenduntur I, Sect. 13
Vis centrifuga corporum in Æquatore Terræ quanta ſit 379, 22
Vis centripeta definitur p. 2
quantitas ejus abſoluta definitur p. 4
quantitas acceleratrix definitur p. 4
quantitas motrix definitur p. 4
proportio ejus ad vim quamlibet notam, qua ratione colligenda ſit, oſtenditur 40, 1
Virium centripetarum inventio, ubi corpus in ſpatio non reſiſtente, circa centrum immobile, in Orbe quocunque revolvitur I, 6: I, Sect. 2 & 3
Viribus centripetis datis ad quodcunque punctum tendentibus, quibus Figura quævis a corpore revolvente deſcribi poteſt; dantur vires centripetæ ad aliud quodvis punctum tendentes, quibus eadem Figura eodem tempore periodico deſcribi poteſt 44, 3
Viribus centripetis datis quibus Figura quævis deſcribitur a corpore revolvente; dantur vires quibus Figura nova deſcribi poteſt, ſi Ordinatæ augeantur vel minuantur in ratione quacunque data, vel angulus Ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico 47, 28
Viribus centripetis in duplicata ratione diſtantiarum decreſcentibus, quænam Figuræ deſcribi poſſunt, oſtenditur 53, 1: 150, 8
Vi centripeta
quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in data quavis coni ſectione 45, 1
quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in Hyperbola 202, 26
Umbra Terreſtris in Eclipſibus Lunæ augenda eſt, propter Atmoſphæræ refractionem 425, 27
Umbræ Terreſtris diametri non ſunt æquales; quanta ſit differentia oſtenditur 387, 8
Undarum in aquæ ſtagnantis ſuperficie propagatarum velocitas invenitur II, 46
Vorticum natura & conſtitutio ad examen revocatur II, Sect. 9: 481, 21
Ut. Hujus voculæ ſignificatio Mathematica definitur 30, 19.

FINIS.

CORRIGENDA.

PAG. 3, *lin.* 14 *lege*, Quo minor erit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major &c. *P.* 7, *l.* 8 *lege*, ut ex veriore tempore menſurent motus &c. *P.* 15, *l.* 16 *lege*, lineam *pH* in plana, &c. *P.* 17, *l.* 20 *lege*, centri corporis tertii &c. *P.* 41, *l.* 3 *lege*, ſunt reciproce ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; &c. *P.* 44, *l.* 23 *lege*, rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$ &c. *P.* 47. *l. penult. lege*, in Abſciſſa poſitum tendentes a binis quibuſvis figurarum locis, ad quæ terminantur Ordinatæ correſpondentibus Abſciſſarum punctis inſiſtentes, augentur vel &c. *P.* 54, *l.* 4 *lege*, ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in &c. *P.* 57, *l.* 25 *lege*, Nimirum ſi ea ſit corporis &c. *P.* 61, *l.* 12 *lege*, ita ut ſit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *KB* ad *BS*, & axe &c. *l.* 15 *lege*, & cum ſit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit diviſim *Ga* — *GA* ſeu *Aa* ad *aS* — *AS* ſeu *SH* in eadem &c. *P.* 87, *l.* 7 *lege*, per Probl. XIV. &c. *P.* 89 & *P.* 90 *in figura jungatur FD.* *P.* 92 *in figura jungantur FG & HI.* *P.* 136, *l.* 2 *lege*, perimetrum *BP* &c. *P.* 166, *l.* 8 *lege*, motus uterque erit ut tempus periodicum corporis &c. *P.* 233, *l. ult. lege*, $+2QRo^3 +$ &c. *P.* 244; *l.* 22 *lege*, $\frac{2nn-2n}{n-2} VG$. *P.* 317, *l. penult. lege*, velocitatem illam maximam *H*, &c. *P.* 367, *l.* 14 *lege*, eccentricitas foret &c. *P.* 379, *l.* 13 & 23 *lege*, vim centrifugam corporum &c. *P.* 415, *l.* 11 *lege*, Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus Nodorum. *P.* 415, *l.* 15 *lege*, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; &c.

27 IV 55